

Fizik 101: Ders 24

Gündem

- Tekrar
- "Başlangıç koşullarını" kullanarak BHH denklemlerinin çözümü.
- Genel fiziksel sarkaç
- Burulmalı sarkaç
- BHHte enerji
 - Atomik titreşimler
- Problem: Düşey yay
- Problem: taşıma tuneli
- BHH tekrar

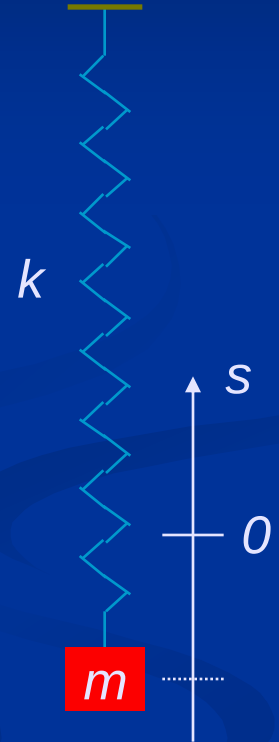
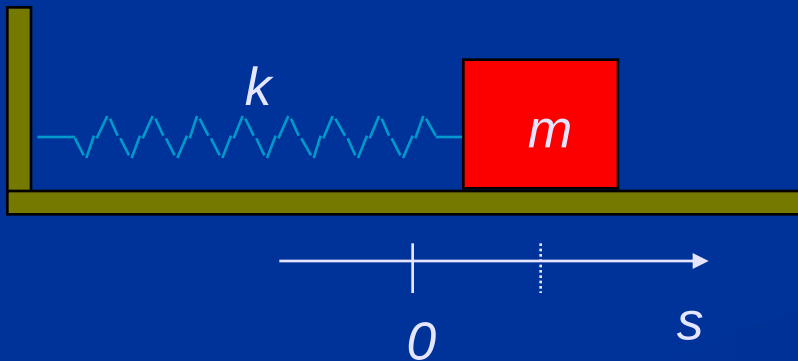
BHH & yaylar

kuvvet: $\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega^2 s$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

çözüm

$$s = A \cos(\omega t + \phi)$$



Hız ve İvme

Konum: $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

Hız: $v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$

İvme: $a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$

Türevleri
alarak...



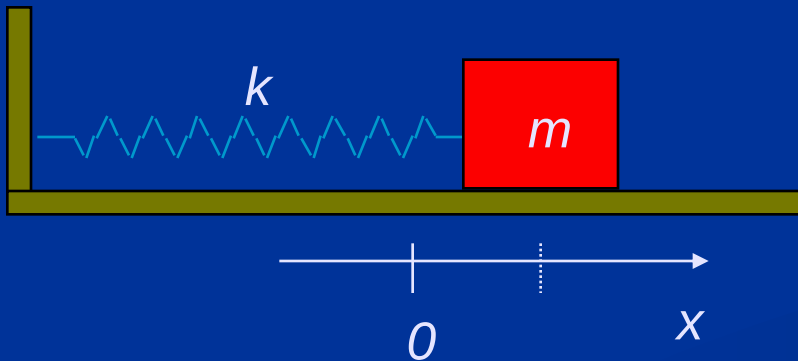
$$x_{\text{MAX}} = A$$

$$v_{\text{MAX}} = \omega A$$

$$a_{\text{MAX}} = \omega^2 A$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

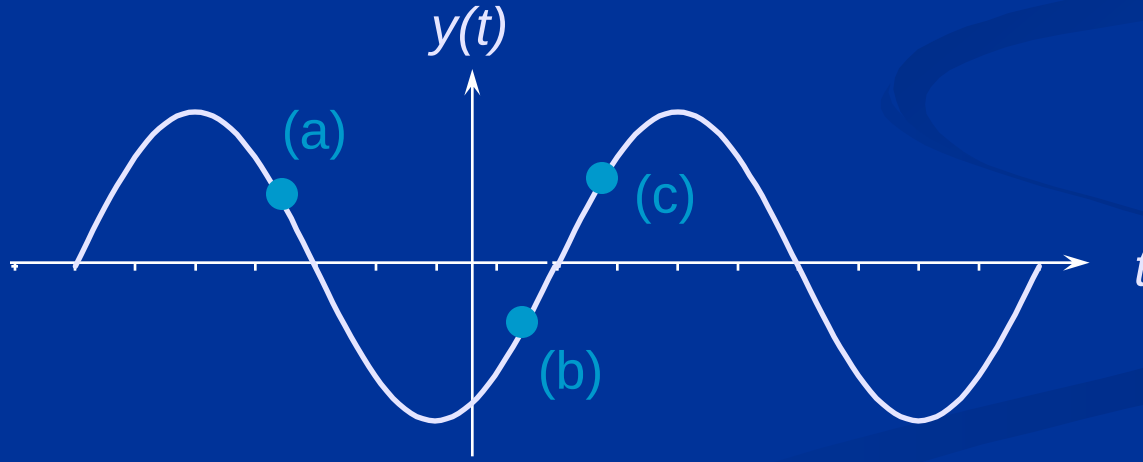
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$



Ders 24, Soru 1

Basit Harmonik Hareket

Bir yay üzerindeki bir kütle aşağı yukarı titreşim hareketler yapmaktadır. Kütlenin konumu zamanın bir fonksiyonu olarak aşağıda verilmiştir. Verilen noktakardan hangisinde hız pozitif ve ivme negatiftir?

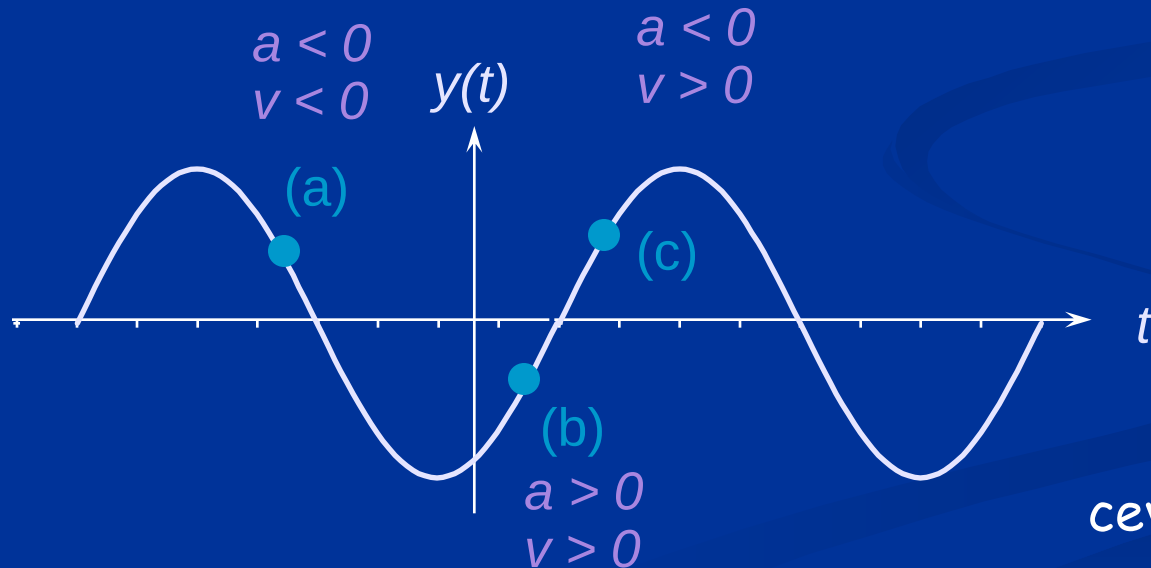


Ders 24, Soru 1

Çözüm

$y(t)$ nin eğimi hızın işaretini belirler zira: $v = \frac{dy}{dt}$

$y(t)$ ve $a(t)$ nin işaretleri birbirinin tersidir $a(t) = -\omega^2 y(t)$



cevap (c).

Örnek

- $m = 2 \text{ kg}$ kütleli bir cisim bir yayın ucunda genliği $A = 10 \text{ cm}$ olan titreşim hareketleri yapıyor. Başlangıçta $t = 0$ hızı **maksimum**, ve $v = +2 \text{ m/s}$.
 - Titreşimin frekansı ω nedir?
 - Yay sabiti k nedir?

$$v_{MAX} = \omega A$$

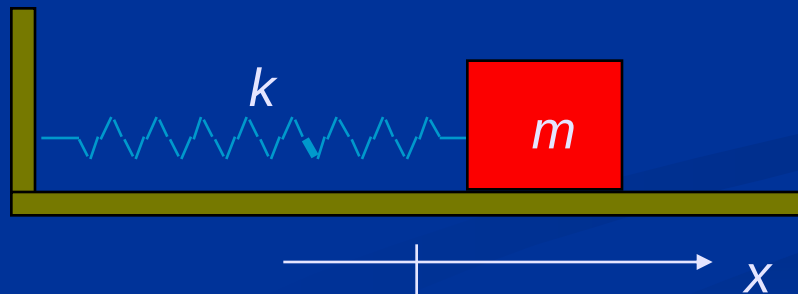
$$\omega = \frac{v_{MAX}}{A} = \frac{2 \text{ m/s}}{10 \text{ cm}} = 20 \text{ s}^{-1}$$

vede $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$



$$k = m\omega^2$$

$$\rightarrow k = (2 \text{ kg}) \times (20 \text{ s}^{-1})^2 = 800 \text{ kg/s}^2 = 800 \text{ N/m}$$



Başlangıç Koşulları

"başlangıç koşullarını" kullanarak ϕ yi belirleyelim!

Vasayım: $x(0) = 0$, ve x
başlangıçta artıyor ($v(0) = \text{pozitif}$):

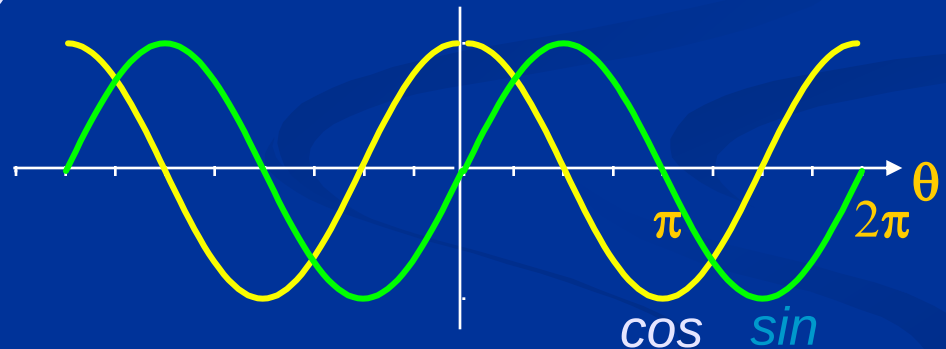
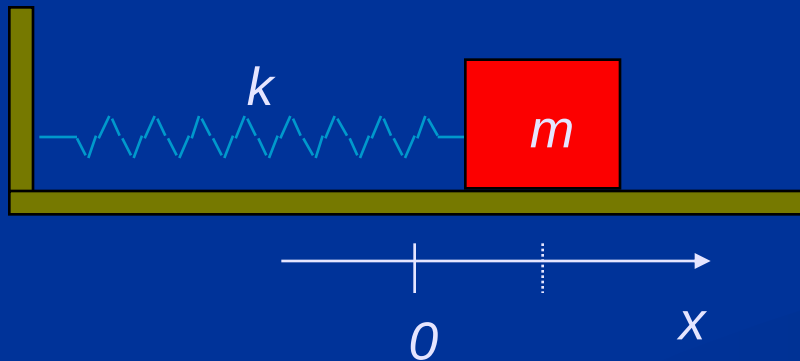
$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos(\omega t + \phi) \\v(t) &= -\omega A \sin(\omega t + \phi) \\a(t) &= -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

$$x(0) = 0 = A \cos(\phi) \Rightarrow \phi = \pi/2 \text{ yada } -\pi/2$$

$$v(0) > 0 = -\omega A \sin(\phi) \Rightarrow \phi < 0$$



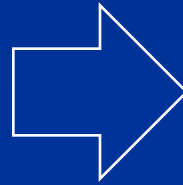
$$\phi = -\pi/2$$



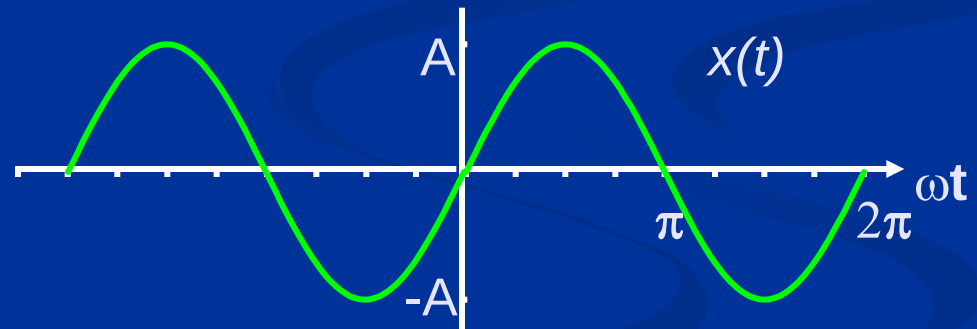
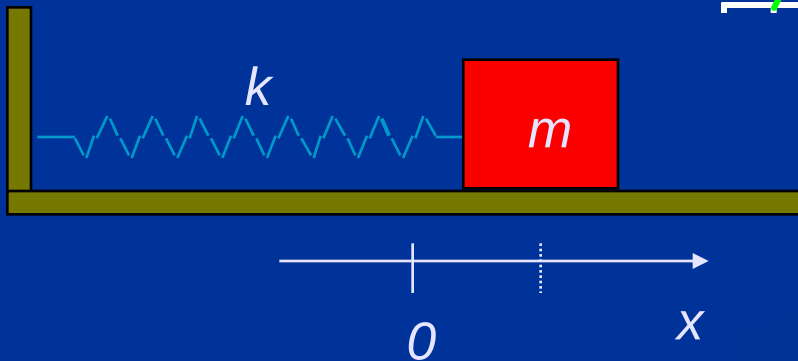
Başlangıç Koşulları...

bulgu $\phi = -\pi/2!!$

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos(\omega t - \pi/2) \\v(t) &= -\omega A \sin(\omega t - \pi/2) \\a(t) &= -\omega^2 A \cos(\omega t - \pi/2)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x(t) &= A \sin(\omega t) \\v(t) &= \omega A \cos(\omega t) \\a(t) &= -\omega^2 A \sin(\omega t)\end{aligned}$$



Ders 24, Soru 2

Başlangıç Koşulları

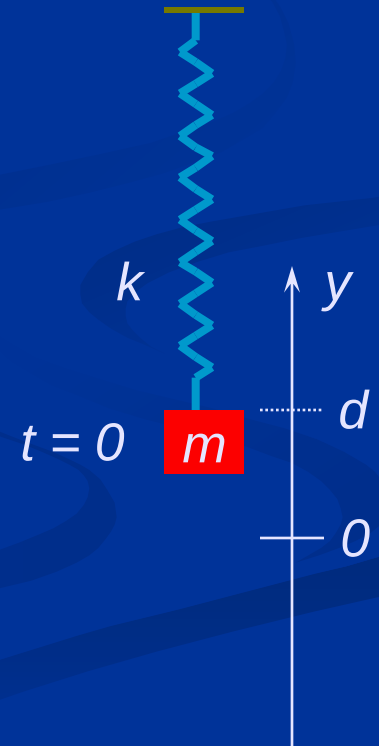
Düşey bir yaya asılı bir kütle denge konumundan d kadar yukarıya kaldırılıp $t=0$ anında serbest bırakılıyor. Aşağıdakilerden hangisi hız ve ivmeyi zamanın fonksiyonu olarak verir?

(a) $v(t) = -v_{max} \sin(\omega t)$ $a(t) = -a_{max} \cos(\omega t)$

(b) $v(t) = v_{max} \sin(\omega t)$ $a(t) = a_{max} \cos(\omega t)$

(c) $v(t) = v_{max} \cos(\omega t)$ $a(t) = -a_{max} \cos(\omega t)$

(v_{max} ve a_{max} her ikisinde pozitif)



Ders 24, Soru 2

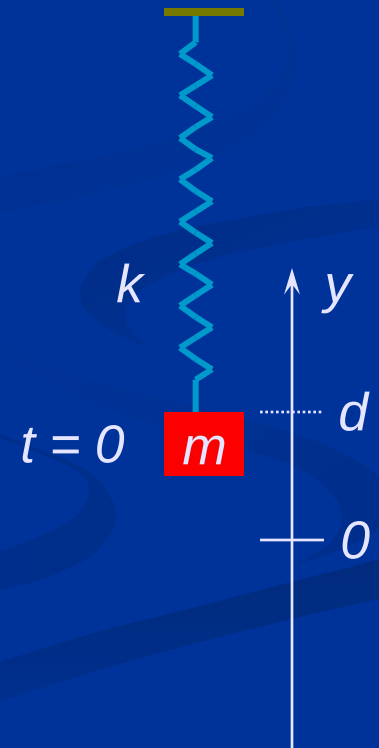
Çözüm

$t=0$ da mümkün olan en büyük yerdeğiştirme ile başladığımızdan :

$$y = d \cos(\omega t)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = -\omega d \sin(\omega t) \equiv -v_{\max} \sin(\omega t)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 d \cos(\omega t) \equiv -a_{\max} \cos(\omega t)$$



Tekrar: Basit sarkaç

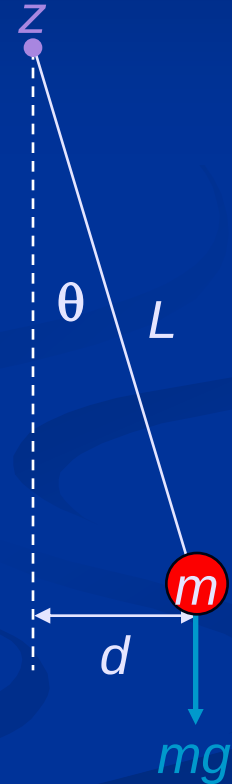
- $\tau = I\alpha$ kullanarak ve $\sin \theta \approx \theta$ küçük θ lar için

$$\underbrace{-mgL\theta}_{\tau} = \underbrace{mL^2}_{I} \underbrace{\frac{d^2\theta}{dt^2}}_{\alpha}$$

bulgu

➡ $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$ burada $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

BHH çözümü ➡ $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$



Tekrar: Çubuk sarkaç

- $\tau = I\alpha$ kullanarak ve $\sin \theta \approx \theta$ küçük θ lar için

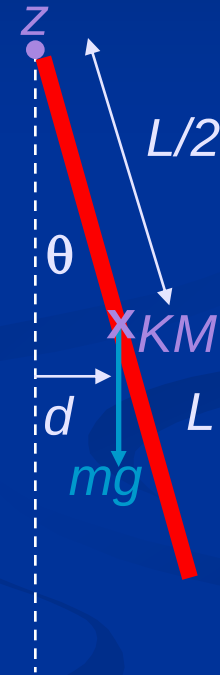
$$\underbrace{-mg \frac{L}{2} \theta}_{\tau} = \underbrace{\frac{1}{3} mL^2}_{I} \underbrace{\frac{d^2 \theta}{dt^2}}_{\alpha}$$

bulgu

→ $\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta$ burada

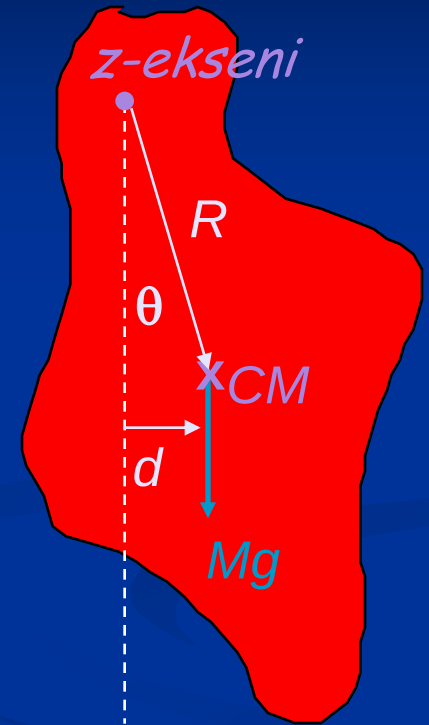
$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

BHH çözümü → $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$



Genel Fiziksel Sarkaç

- Elimizde M kütleli, şekli keyfi olan bir cisim sabit bir eksene asılı bulunsun. Bunun yanında bu cisim için KM ve bu eksen etrafında biliniyor eylemsizlik moment I olsun.
- Küçük açılar θ için dönme eksenini (z) etrafındaki tork ($\sin \theta \approx \theta$)



$$\tau = -Mgd \approx -MgR\theta \quad \underbrace{-MgR\theta}_{\tau} = I \underbrace{\frac{d^2\theta}{dt^2}}_{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta \quad \text{burada}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{MgR}{I}}$$

$$\Rightarrow \theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Ders 24, Soru 3

Fiziksel Sarkaç

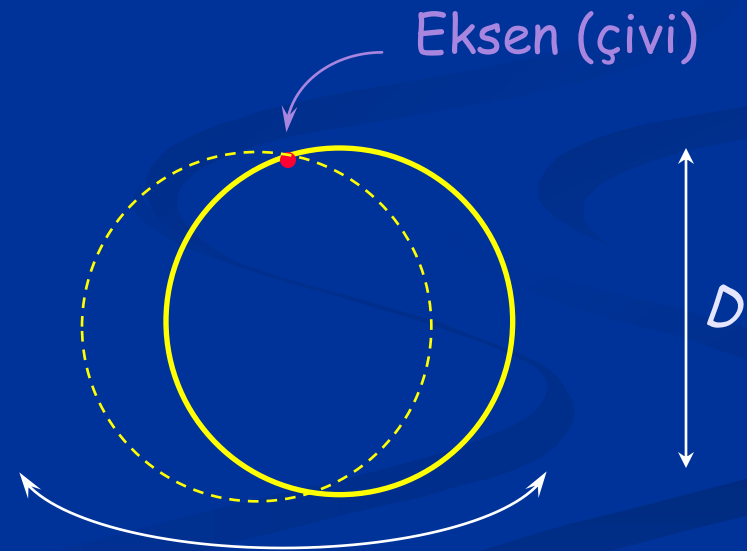
- D çaplı bir hoola hoop'un bir çiviye asılmasıyla bir sarkaç yapılıyor.

hoola hoopun küçük yerdeğiştirmeleri için açısal frekans nedir? ($I_{KM} = mR^2$ hoop için)

(a) $\omega = \sqrt{\frac{g}{D}}$

(b) $\omega = \sqrt{\frac{2g}{D}}$

(c) $\omega = \sqrt{\frac{g}{2D}}$



Ders 24, Soru 3

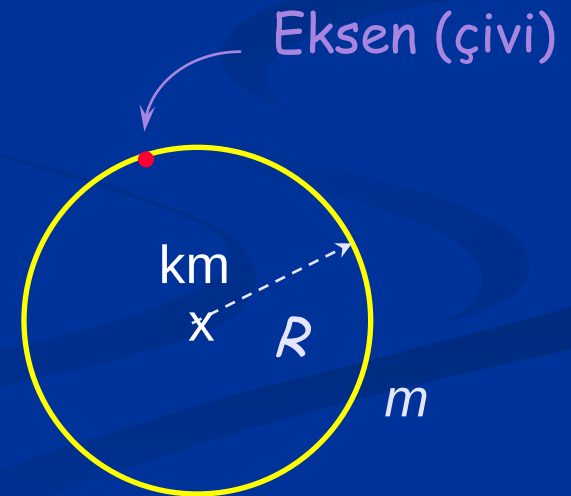
Çözüm

➤ Küçük yerdeğiştirmeler için hoopun açısal frekansı $\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I}}$

Paralel eksen teoremini kullanarak: $I = I_{cm} + mR^2$
 $= mR^2 + mR^2 = 2mR^2$

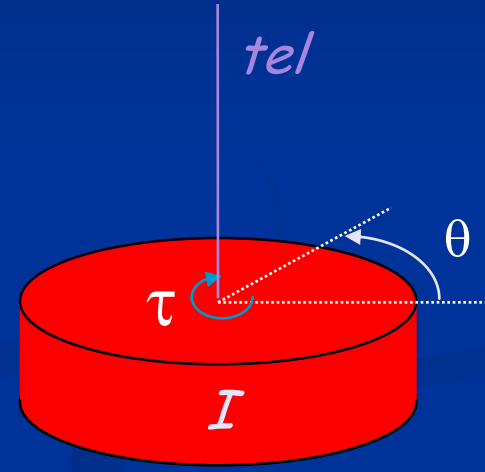
$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{2mR^2}} = \sqrt{\frac{g}{2R}} = \sqrt{\frac{g}{D}}$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{D}}$$



Burulmalı Sarkaç

- KM'inden bir tel ile asılı bir cismi dikkate alalım. Tel dönme eksenini tanımlar ve bu eksene göre eylemsizlik momenti I biliniyor olsun.
- Tel "burulma yayı gibi" davranır.
 - Cisim döndürüldüğünde, tel burulur. Bu dönmeye karşı bir tork meydana getirir.
 - Yay durumundaki gibi meydana gelen tork açısal yer değiştirme ile orantılıdır:
$$\tau = -k\theta$$

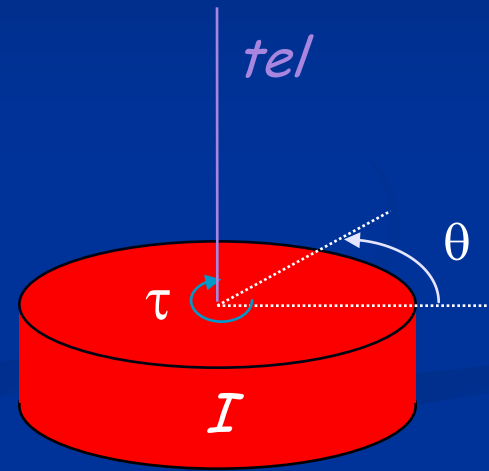


Burulmalı Sarkaç...

- $\tau = -k\theta$, ve $\tau = I\alpha$ yazarsak

$$-k\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

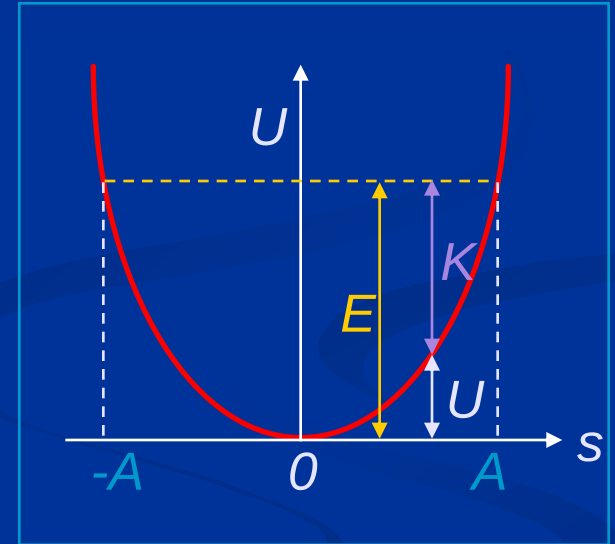
→ $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$ burada $\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$



Bu durum “yay da kütle” örneğine benzer bir farklılıkla m yerine I kullanılır.

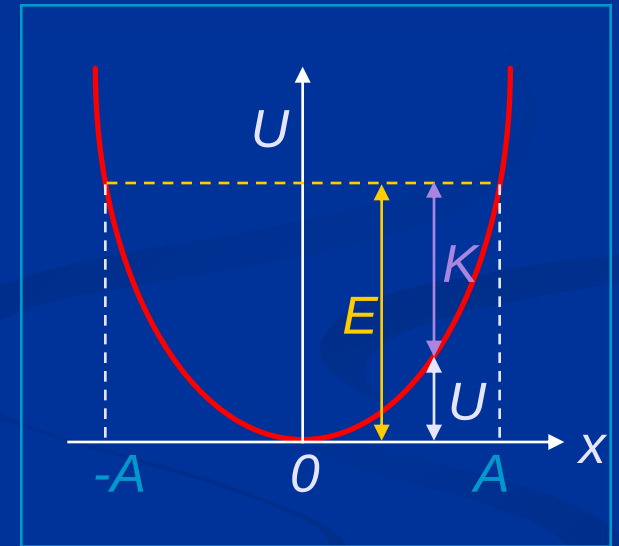
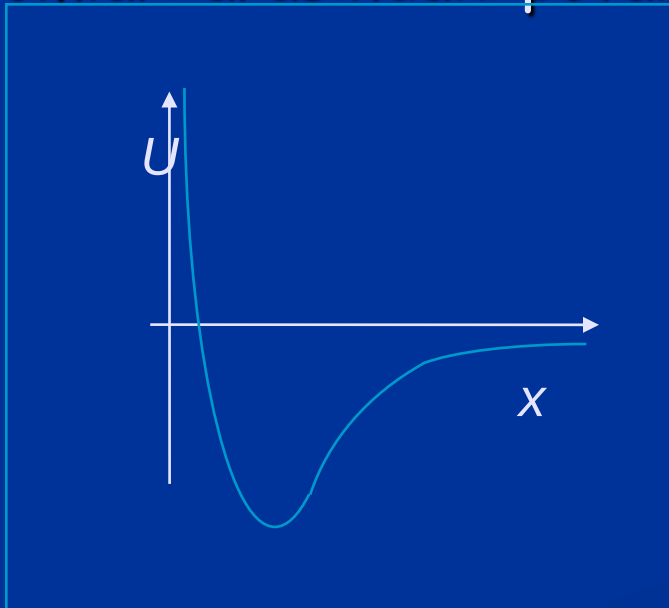
BHHte Enerji

- Yay ve sarkaç için enerjinin korunumunu kullanarak BHH çözümünü bulabiliriz.
- BHH yapan sistemin toplam enerjisi ($K + U$) her zaman sabit kalacaktır!
- Sistemde korunumlu kuvvetler olduğundan bu beklenmektedir ve $K+U$ enerji korunur.



BHH ve kuadratik (karesel) potansiyeller

- Kuadratik potansiyelin bulunduğu her yerde BHH olur.
- Bu genel bir durum değildir.
- Örneğin, H_2 molekülündeki H atomları arasındaki potansiyel:



BHH ve kuadratik potansiyeller...

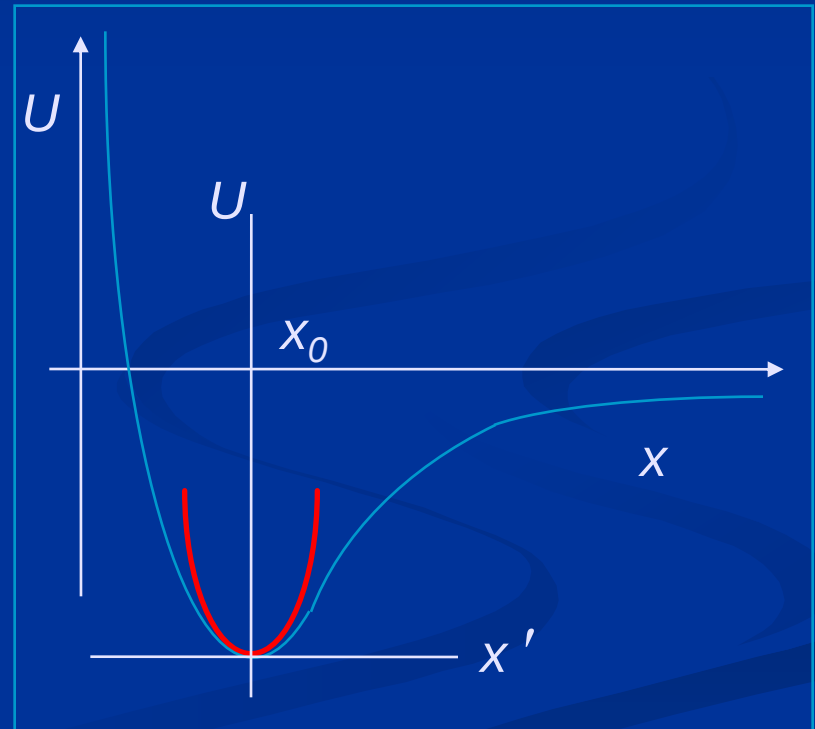
Eğer potansiyelin minimum yakınlarda bir taylor serisine açarsak küçük yerdeğıştirmeler için kuadratik potansiyel:

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0) (x - x_0) + \frac{1}{2} U''(x_0) (x - x_0)^2 + \dots$$

$$U'(x_0) = 0 \text{ (} x_0 \text{ potansiyel minimumu olduğundan.)}$$

tanım $x' = x - x_0$ ve $U(x_0) = 0$

$$\rightarrow U(x) = \frac{1}{2} U''(x_0) x'^2$$



BHH ve kuadratik potansiyeller...

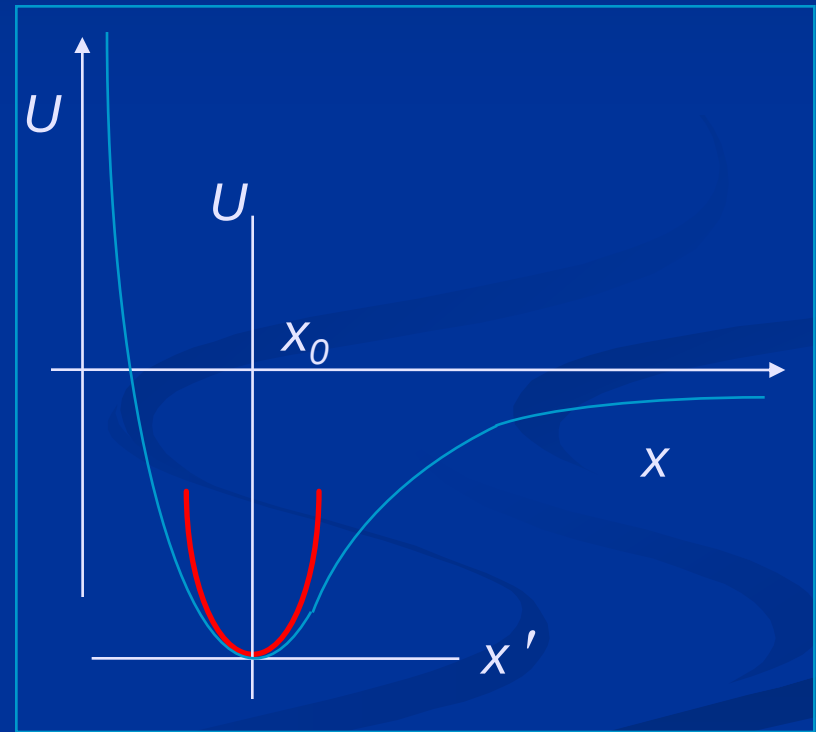
$$U(x) = \frac{1}{2} U''(x_0) x'^2$$

$k = U''(x_0)$ olsun.

Böylece:

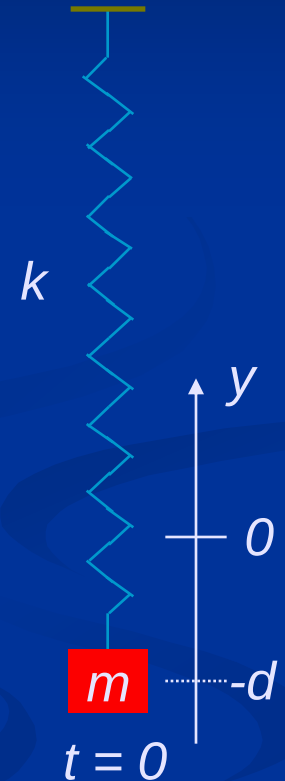
$$U(x) = \frac{1}{2} k x'^2$$

BHH potansiyel!!!



Problem: Düşey Yay

- $m = 102 \text{ g}$ olan bir kütle yatay bir yaya asılır. Denge pozisyonu $y = 0$ dir. Kütle denge konumundan $d=10 \text{ cm}$ aşağı çekilir ve $t=0$ anında serbest bırakılır. Titreşim periyodu $T = 0.8 \text{ s}$ olarak ölçülür.
 - Yay sabiti k nedir?
 - Kütle için konum, hız ve ivmeyi zamanın birer fonksiyonu olarak yazınız.
 - Maksimum hız nedir?
 - Maksimum ivme nedir?



Problem: Düşey Yay

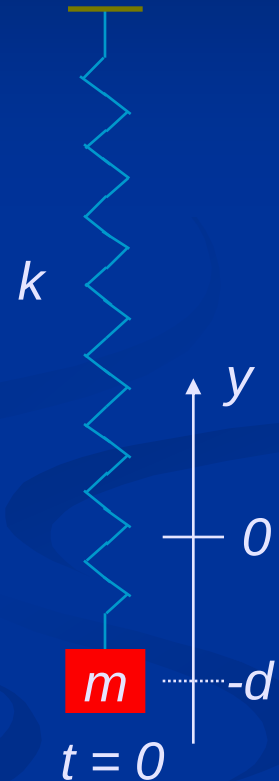
■ k nedir?

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = \omega^2 m$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.85 \text{ s}^{-1}$$

böylece:

$$k = (7.85 \text{ s}^{-1})^2 0.102 \text{ kg} = 6.29 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$



Problem: Düşey Yay...

- Hareket denklemleri nelerdir?

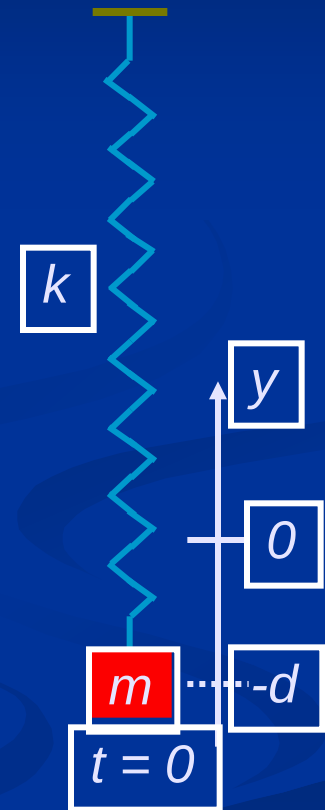
- $t = 0$ da,

- $y = -d = -y_{max}$

- $v = 0$

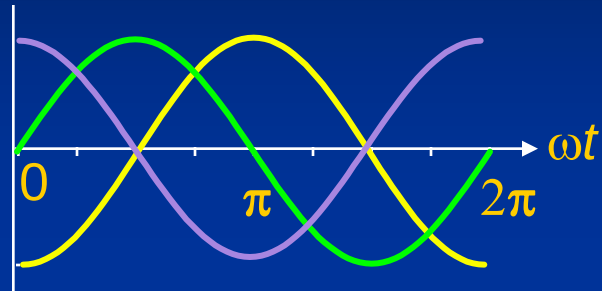
- Böylece:

$$\begin{aligned}y(t) &= -d \cos(\omega t) \\v(t) &= \omega d \sin(\omega t) \\a(t) &= \omega^2 d \cos(\omega t)\end{aligned}$$



Problem: Yatay Yay...

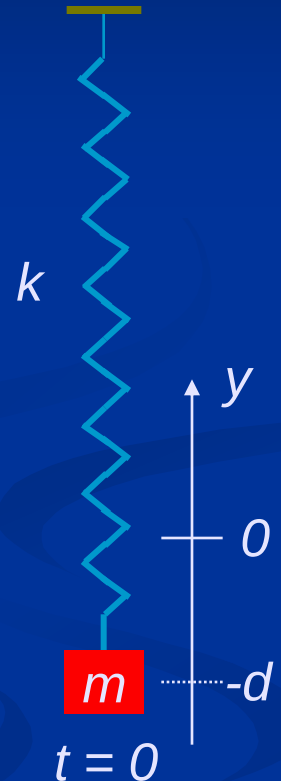
$$\begin{aligned}y(t) &= -d \cos(\omega t) \\v(t) &= \omega d \sin(\omega t) \\a(t) &= \omega^2 d \cos(\omega t)\end{aligned}$$



$$x_{\max} = d = .1\text{m}$$

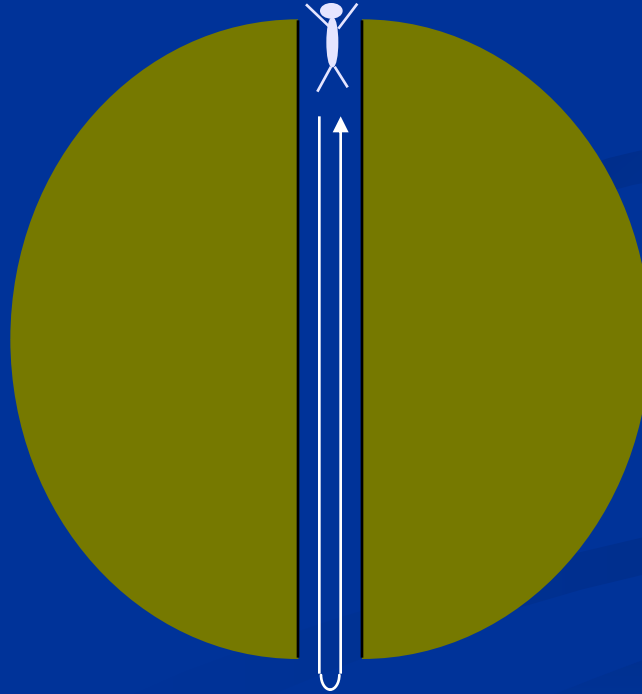
$$v_{\max} = \omega d = (7.85 \text{ s}^{-1})(.1\text{m}) = 0.78 \text{ m/s}$$

$$a_{\max} = \omega^2 d = (7.85 \text{ s}^{-1})^2(.1\text{m}) = 6.2 \text{ m/s}^2$$

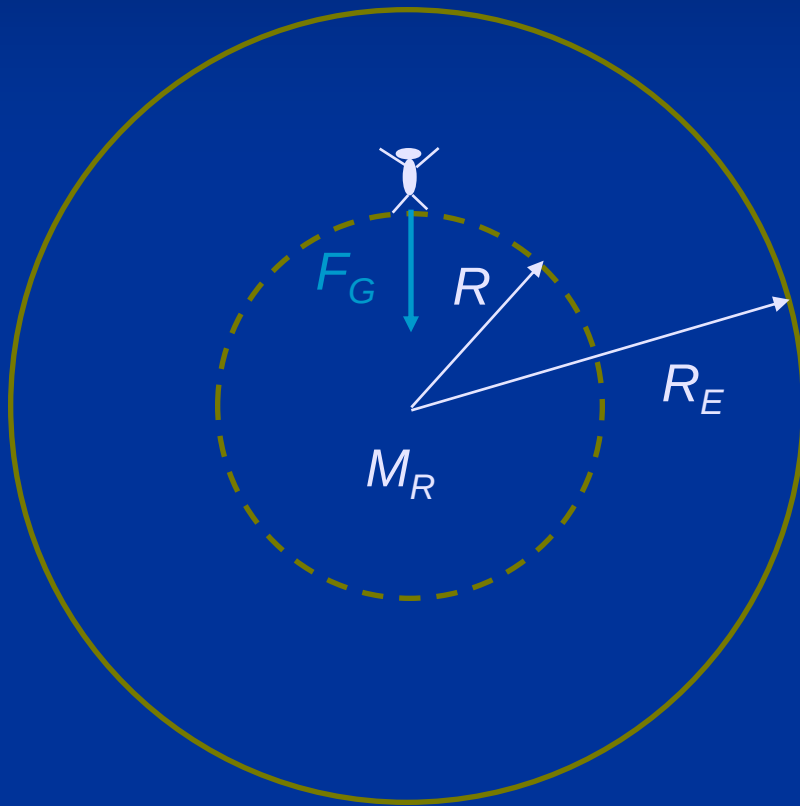


İletim Tüneli

- Dünyanın merkezinden geçen bir tünel delinip bir mühendislik öğrencisi delikten aşağı öğle arasında (saat 12de) bırakılsın.
 - Öğrenci ne zaman geri döner?



İletim Tüneli...



$$F_G(R) = \frac{GmM_R}{R^2}$$

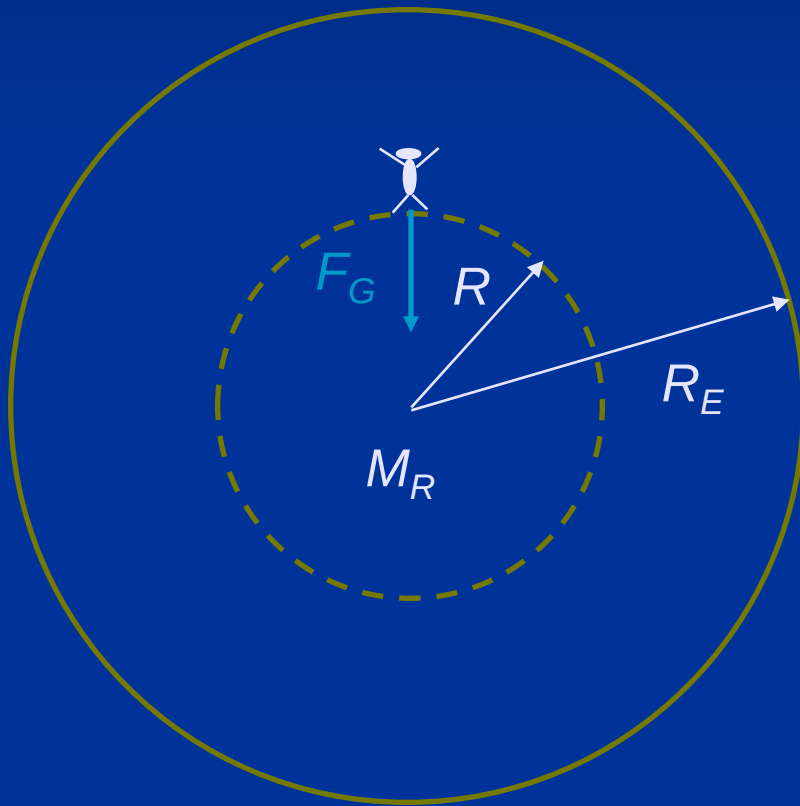
Burada R yarıçapı içindeki kütle M_R ile verilir.

$$\frac{F_G(R)}{F_G(R_E)} = \frac{M_R}{R^2} \frac{R_E^2}{M_E}$$

ama $M_R \propto R^3$

$$\frac{F_G(R)}{F_G(R_E)} = \frac{R^3}{R^2} \frac{R_E^2}{R_E^3} = \frac{R}{R_E}$$

İletim Tüneli...



$$\frac{F_G(R)}{F_G(R_E)} = \frac{R}{R_E}$$

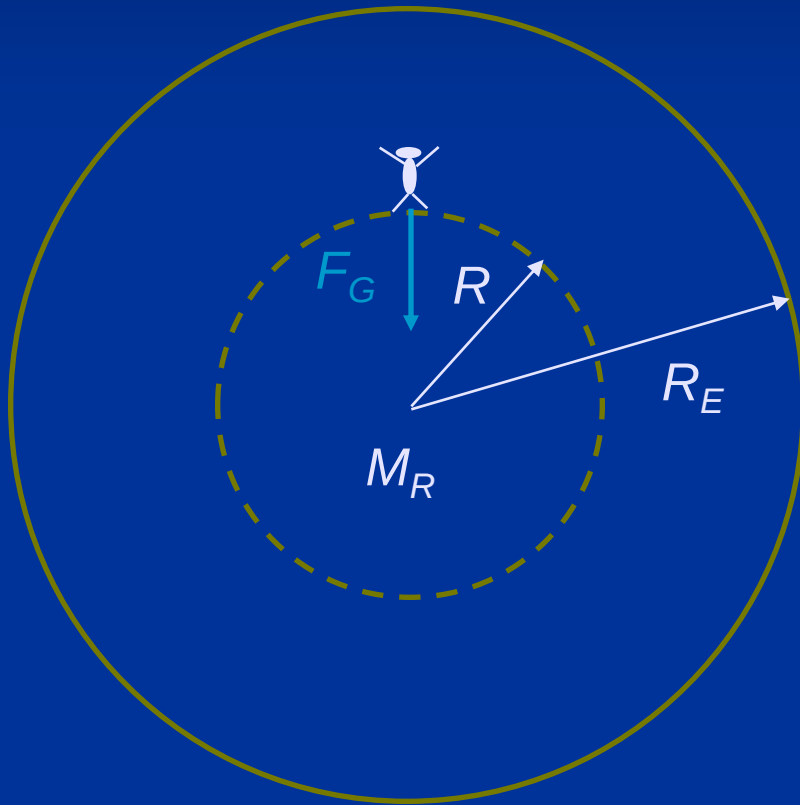
$$F_G(R_E) = -mg$$

$$F_G = -mg \frac{R}{R_E} = -kR$$

Ucunda kütle
olan yay gibi

$$k = \frac{mg}{R_E}$$

İletim Tüneli...



Ucunda kütle
olan yay gibi $k = \frac{mg}{R_E}$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{R_E}}$$

$g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ve

$$R_E = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$$

Yerine koyarsak

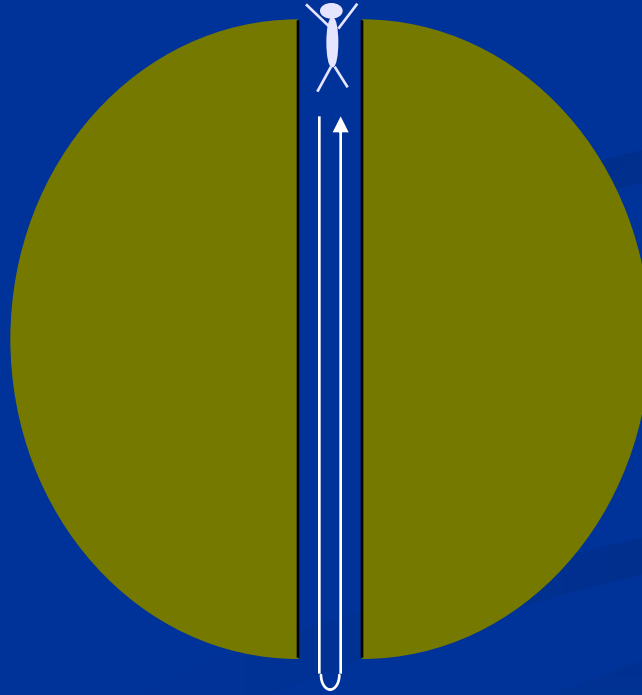
$$\omega = .00124 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{sonuç } T = \frac{2\pi}{\omega} = 5067 \text{ s}$$

$$\approx 84 \text{ dk}$$

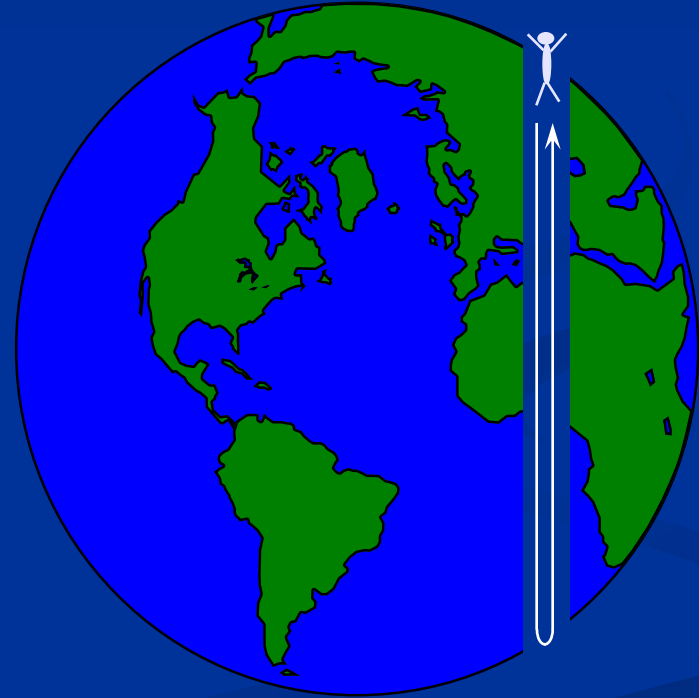
İletim Tüneli...

- 84 dakika sonra geri döner, yani 1:24 te dünya turu yapıp döner.



İletim Tüneli...

- **Tuhaf ama gerçek:**
Titreşim periyodu tünelin dünyanın merkezinden geçmesini gerektirmez. Herhangi bir doğru tünel sürtünme olmadığı ve yoğunluk sabit olduğu sürece aynı sonucu verir.



İletim Tüneli...

- Bir başka tuhaf ama gerçek: Dünyanın hemen yüzeyinde dolaşan bir cisim geçiş tüneli ile aynı periyoda sahiptir.

$$a = \omega^2 R$$

$$9.81 = \omega^2 6.38(10)^6 m$$

$$\omega = .00124 s^{-1}$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 5067 s \\ \approx 84 min$$

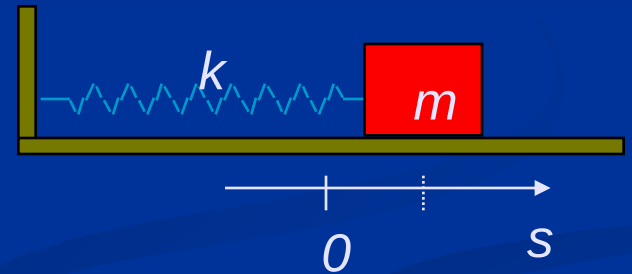
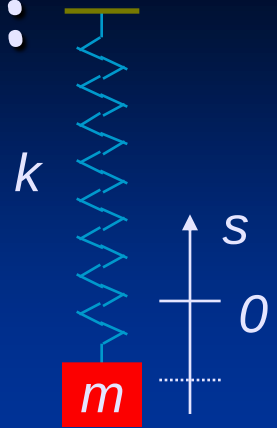


Basit Harmonik Hareket: Özet

Kuvvet: $\frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 s$

Çözüm:
 $s = A \cos(\omega t + \phi)$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$



Çözüm

- Tekrar
- “Başlangıç koşullarını” kullanarak BHH denklemlerinin çözümü.
- Genel fiziksel sarkaç
- Burulmalı sarkaç
- BHHte enerji
 - Atomik titreşimler
- Problem: Düşey yay
- Problem: taşıma tuneli
- BHH tekrar

Quiz sınav soruları:

- Bölüm 8 soru 81
- Bölüm 9 soru 100
- Bölüm 10 soru 44
- Bölüm 11 soru 59
- Bölüm 13 soru 68

Cevap kağıdının okunaklı, temiz ve düzenli olması %25 ağırlıklıdır.

Teslim: 30.11.2012