

Fizik 101: Ders 19

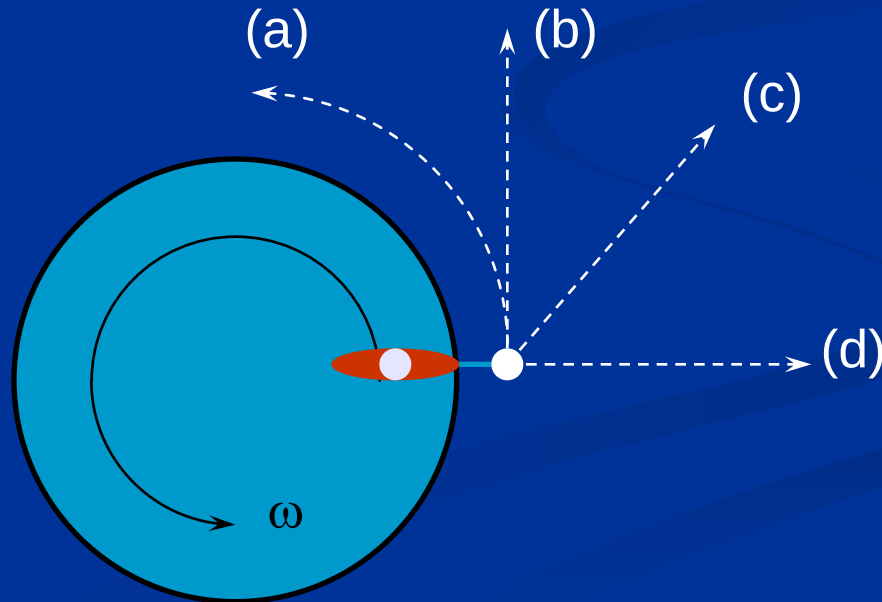
Gündem

- Açısal Momentum:
 - Tanım & Türetmeler
 - Anlamı nedir?
- Sabit bir eksen etrafında dönme
 - $L = I\omega$
 - Örnek: 2 disk
 - Dönen iskemlede bir öğrenci
- Serbest hareket eden bir cismin açısal momentumu
 - Değneğe çarpan kurşun
 - Top fırlatan öğrenci

Ders 19, Soru 1

Rotasyon

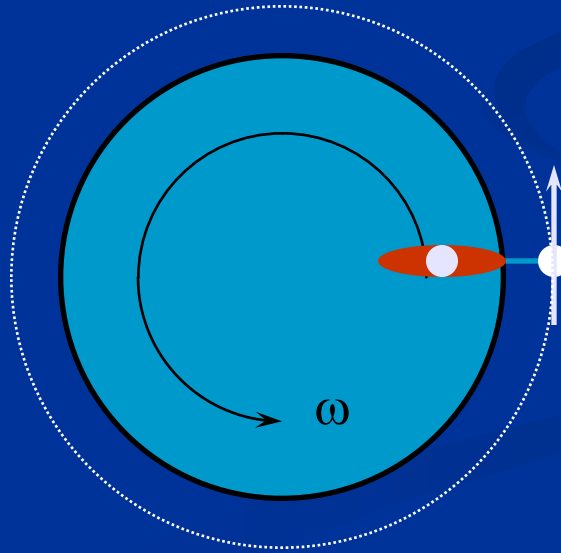
- Atlı karıncaya binen bir çocuk dairesel bir yörüngede sabit ω hızı ile dönerken elinde tuttuğu bir topu serbest bırakır. Yukarıdan bakınca top hangi yolu izler?



Ders 19, Soru 1

Çözüm

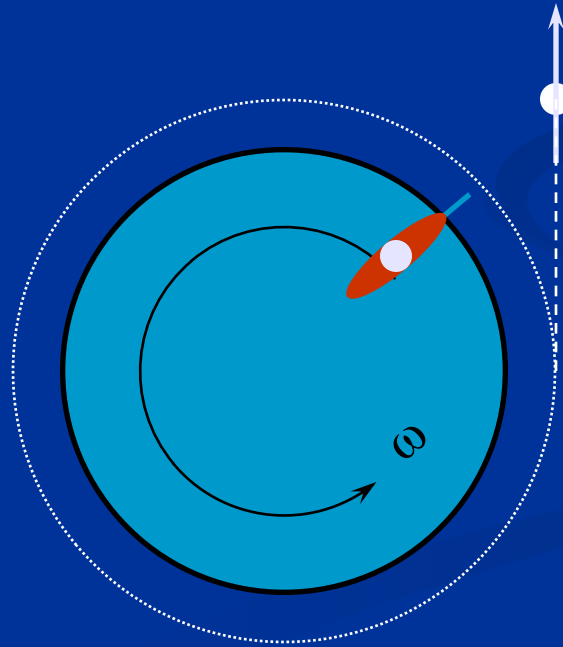
- Bırakmadan hemen önce topun hızı dairesel yörüngeye teğettir.



Ders 19, Soru 1

Çözüm

- Hızı değiştirecek etki eden başka kuvvet olmadığından bırakıldıktan sonra aynı yolda devam eder.



$p = mv$ Açısal Momentum: Tanımlar & Türetmeler

- Çok parçacıklı bir sistem için :

$$F_{DIŞ} = \frac{dp}{dt} \Rightarrow F_{DIŞ} = 0 \text{ ise momentum korunur.}$$

- Buna rotasyonda karşılık gelen nedir??

- Kuvvete rotasyonda karşılık gelen tork $\tau = r \times F$
- Çizgisel momentumun p , rotasyon analogunu açısal momentum olarak $L = r \times p$ şeklinde tanımlayalım.

Tanımlar & Türetmeler...

- Önce Ldeki değişim miktarına bakalım:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) &= \underbrace{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p}\right)}_{= (\mathbf{v} \times m\mathbf{v})} + \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{dL}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (\text{ne yani...?})$$

Tanımlar & Türetmeler...

$$\frac{dL}{dt} = r \times \frac{dp}{dt}$$

➤ Anımsatma: $F_{DIŞ} = \frac{dp}{dt} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \underbrace{r \times F_{DIŞ}}_{\tau_{DIŞ}}$

➤ Sonuç olarak:

$$\tau_{DIŞ} = \frac{dL}{dt}$$

➤ F' ye analog $F_{DIŞ} = \frac{dp}{dt} !!$

Bu Ne Demek?

■ $\tau_{\text{DIŞ}} = \frac{dL}{dt}$ burada $L = r \times p$ ve $\tau_{\text{DIŞ}} = r \times F_{\text{DIŞ}}$

➤ Dış tork'un olması durumunda $\tau_{\text{DIŞ}} = \frac{dL}{dt} = 0$



Toplam açısal momentum korunur

Sabit bir eksen etrafında katı bir cismin açısal momentumu:

- Şekilde gösterildiği gibi x - y düzleminde z eksenini etrafında dönen noktasal parçacıkların katı dağılımını dikkate alalım. Orijin etrafındaki toplam açısal momentum her bir parçacığın açısal momentumunun toplamına eşittir:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i m_i r_i v_i \hat{k}$$

(r_i ve v_i birbirine dik olduğundan)

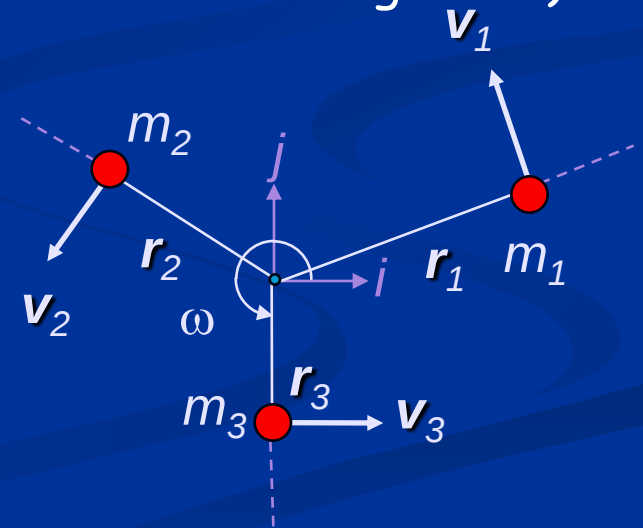
$\mathbf{L}$ nin yönü z yönünde dir..

$v_i = \omega r_i$ kullanarak

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i r_i^2 \omega \hat{k}$$

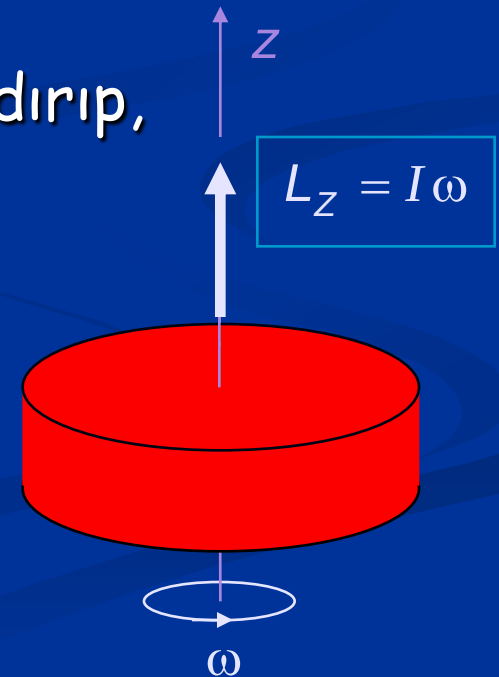
$$\mathbf{L} = I \omega$$

benzeri $\rightarrow \mathbf{p} = m\mathbf{v} !!!$



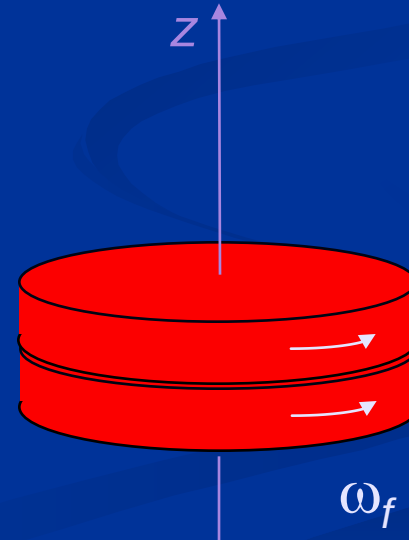
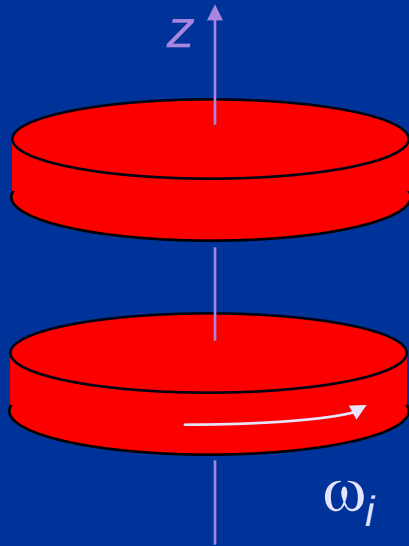
Sabit bir eksen etrafında katı bir cismin açısal momentumu:

- Genelde, sabit bir (z) eksenini etrafında dönen bir cisim için $L_z = I\omega$ yazabiliriz.
- L_z nin yönü sağ el kuralı ile verilir. (τ ile aynı).
- Kolaylık olması açısından z indisini kaldırıp, $L = I\omega$ yazarız.



Örnek: İki Disk

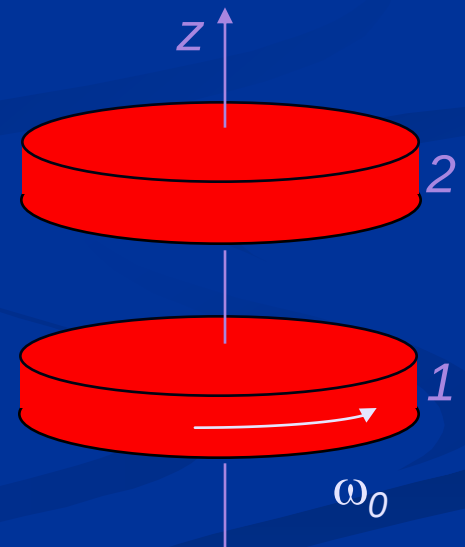
- Kütle M ve yarıçapı R olan bir disk z eksenini etrafında ω_i açısal hızı ile dönmekte iken durgun olan özdeş ikinci disk birincisi üzerine düşer. İki disk arasında sürtünme mevcuttur. Sonunda her iki disk ω_f açısal hızı ile dönmeye başlar.



Örnek: İki Disk

- Öncelikle her iki diske dıştan etki eden bir tork olmadığının altını çizelim!
- Başlangıçtaki toplam açısal momentum alttaki dönen disk yüzündendir:

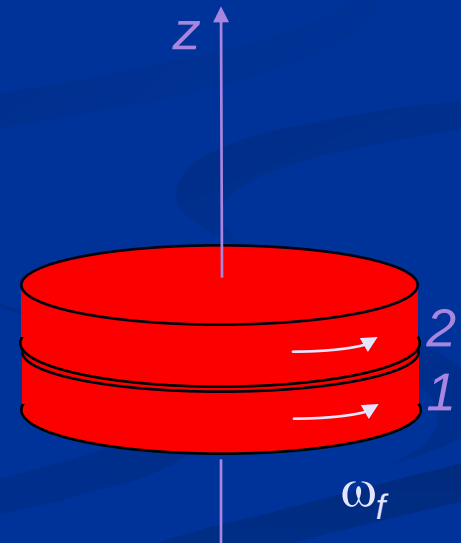
$$L_i = I_1 \omega_1 = \frac{1}{2} MR^2 \omega_i$$



Örnek: İki Disk

- Dışardan her iki diskte etki eden tork olmadığından
 - Açısal momentum korunur!
- Sondaki toplam açısal momentum her iki diskin birden dönmesinden dolayıdır:

$$L_f = I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 = MR^2 \omega_f$$

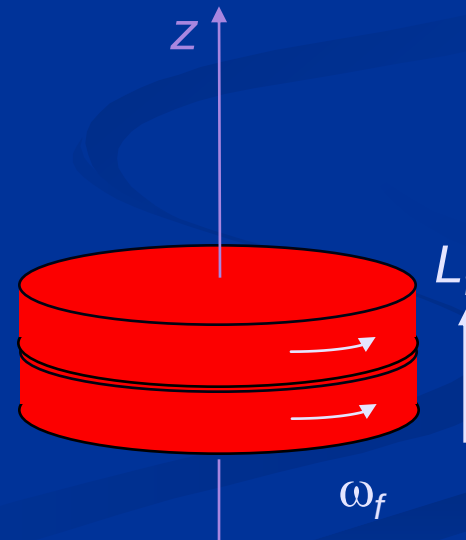
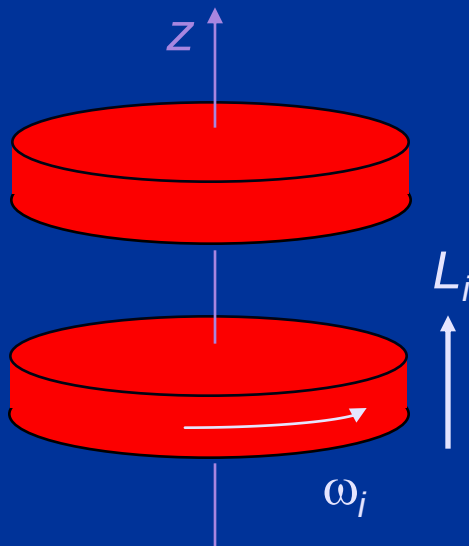


Örnek: İki Disk

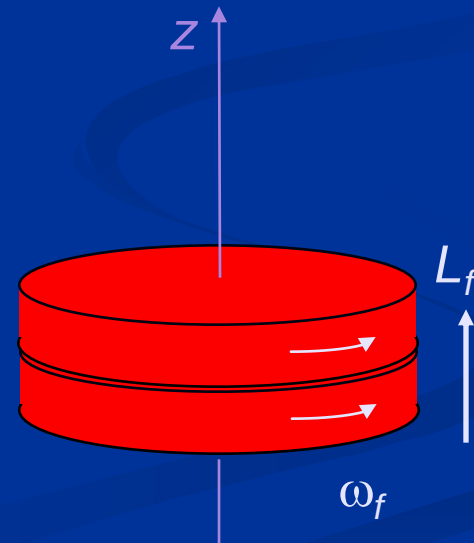
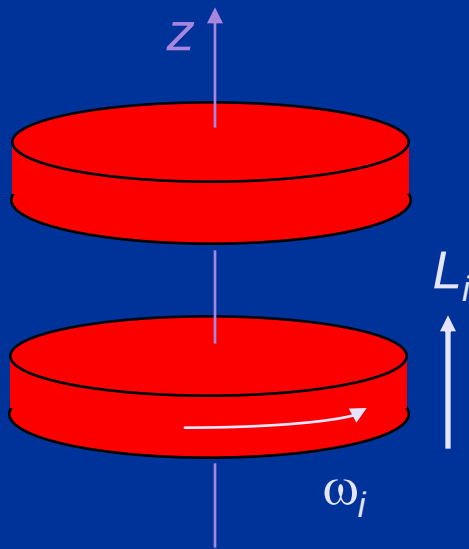
■ Zira $L_i = L_f \Rightarrow \frac{1}{2}MR^2\omega_i = MR^2\omega_f$

$\Rightarrow \boxed{\omega_f = \frac{1}{2}\omega_i}$

Sürtünmeden dolayı E korunmadığından inelastik bir çarpışmadır!

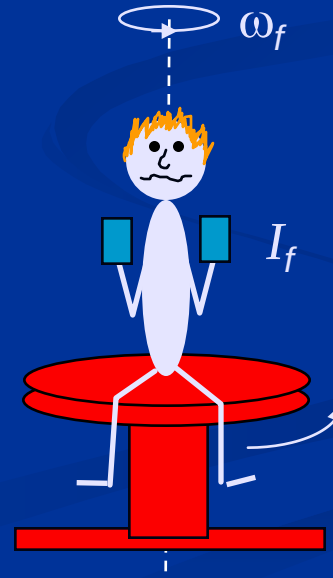
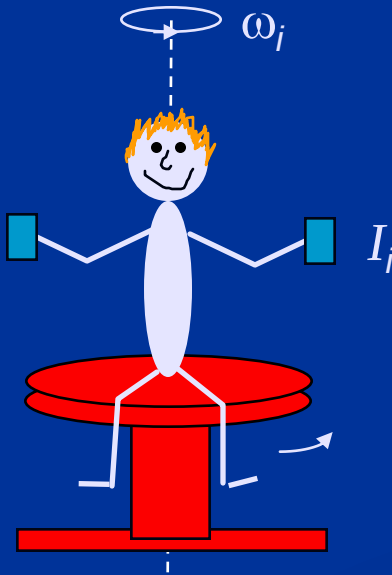


Örnek: İki Disk



Örnek: Dönen iskemlede

- Ellerinde ağırlıklar taşıyan bir öğrenci kollarını gererek bir taburede oturmaktadır. Öğrencinin açısal dönme hızı ω_i ve eylemsizlik momentumu I_i olarak veriliyor. Sonra kollarını vücuduna değecek şekilde büker ve son eylemsizlik momenti I_f olur. Son durumdaki açısal hızı ω_f nedir?



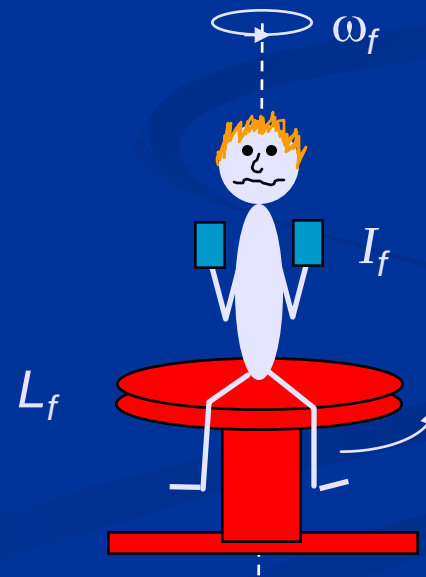
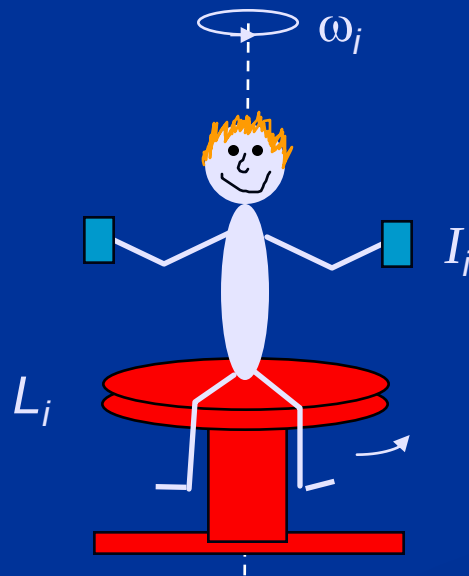
Örnek: Dönen iskemlede...

- Burada da öğrenci iskemle sistemine etki eden dış tork olmadığından açısal momentum korunur.

- Başlangıçta: $L_i = I_i \omega_i$

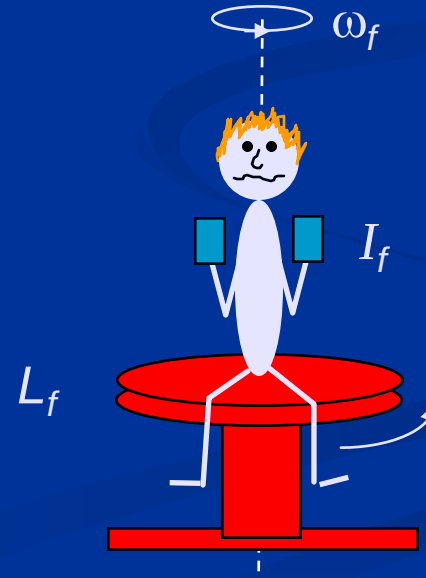
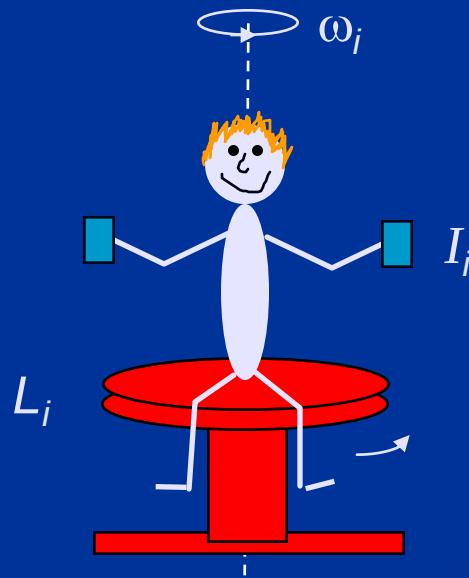
- Sonunda: $L_f = I_f \omega_f$

$$\Rightarrow \frac{\omega_f}{\omega_i} = \frac{I_i}{I_f}$$



Örnek: Dönen iskemlede...

- Bir öğrenci ω_1 açısal hızı ile serbestçe dönmekte olan bir iskemleye kolları gergin olarak oturuyor. Öğrenci sonra kollarını kavuşturur ve açısal hızı ω_2 ye çıkar. Bunu yapmakla kinetik enerji:



Ders 19, Soru 2

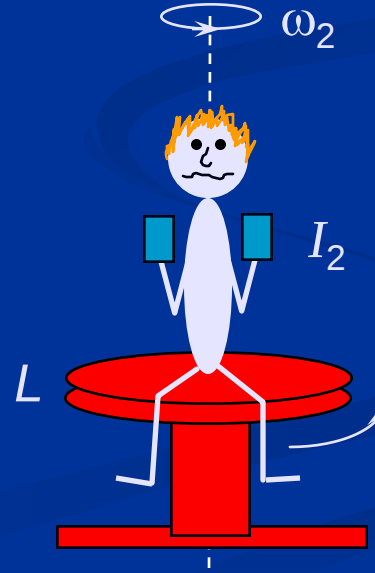
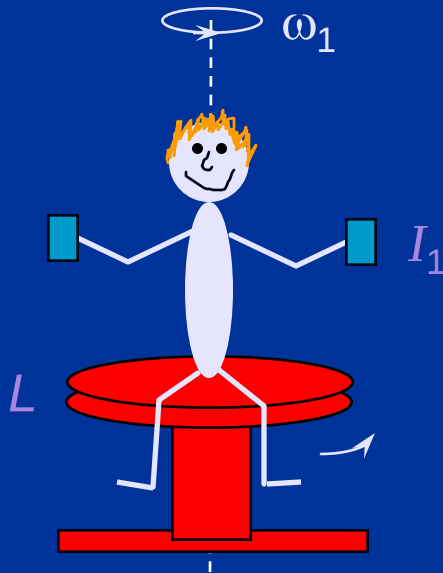
Açısal Momentum

- Bir öğrenci ω_1 açısal hızı ile serbestçe dönmekte olan bir iskemleye kolları gergin olarak oturuyor. Öğrenci sonra kollarını kavuşturur ve açısal hızı ω_2 ye çıkar. Bunu yapmakla kinetik enerji:

(a) artar

(b) azalır

(c) aynı kalır



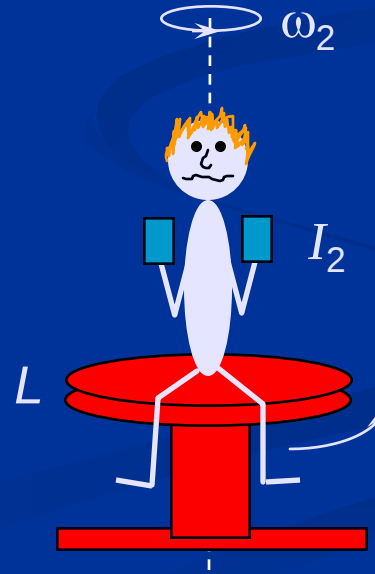
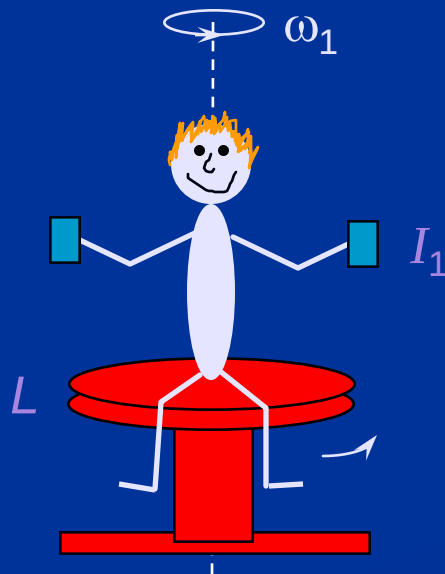
Ders 19, Soru 2

Çözüm

■ $K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{L^2}{2I}$ ($L = I\omega$ kullanarak)

■ L korunur:

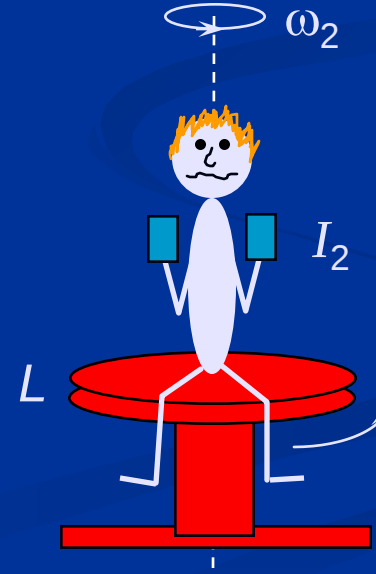
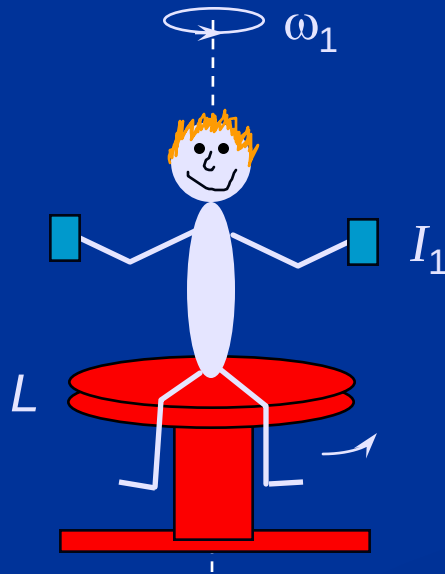
$I_2 < I_1 \Rightarrow K_2 > K_1$ K artar!



Ders 19, Soru 2

Çözüm

- Öğrenci kollarını bükmek için bir kuvvet uygular ve pozitif bir iş yapar!
- İş/KE enerji teoremine göre sistemin KEsi artacaktır!



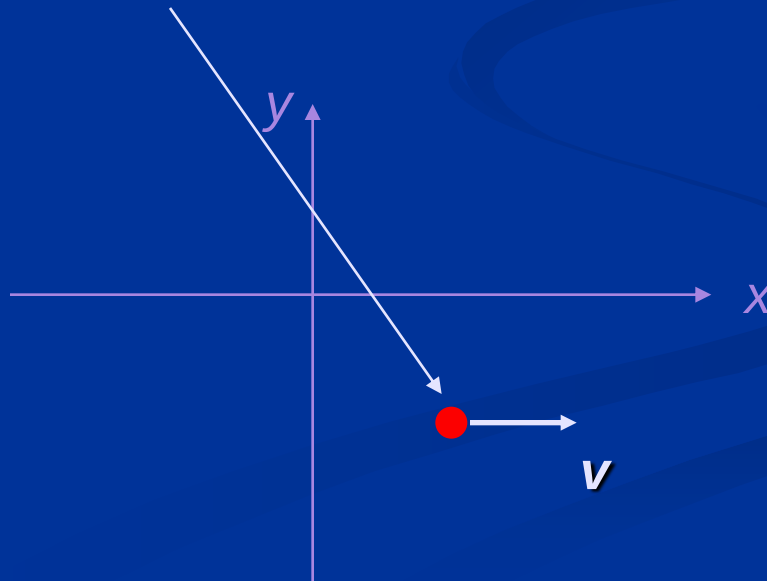
Serbestçe hareket eden bir parçacığın açısal momentumu

- Bir parçacığın orijine göre açısal momentumu tanımı:

$$L = r \times p$$

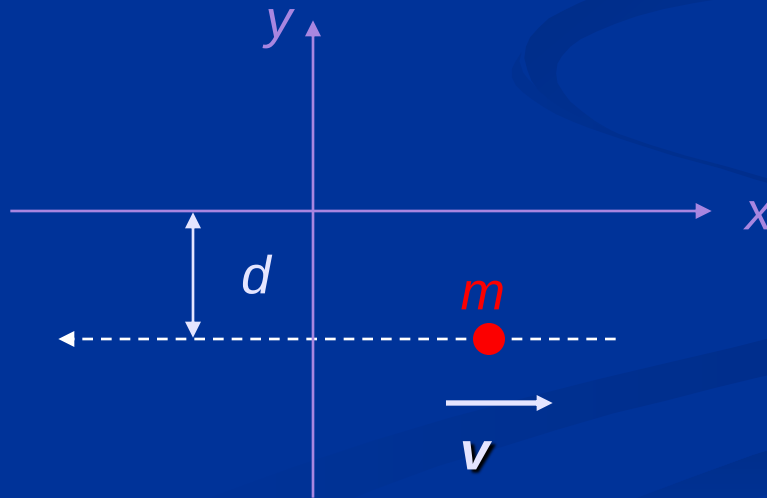
- Bu tanım parçacığın dairesel hareket etmesini *gerektirmez!*

- Bu parçacığın sabit bir açısal momentumu vardır!



Serbestçe hareket eden bir parçacığın açısal momentumu...

- Kütle m ve v hızı ile $y = -d$ doğrusunda hareket eden bir parçacığı dikkate alalım. Orijinde $(0, 0)$ ölçülen açısal momentum nedir?

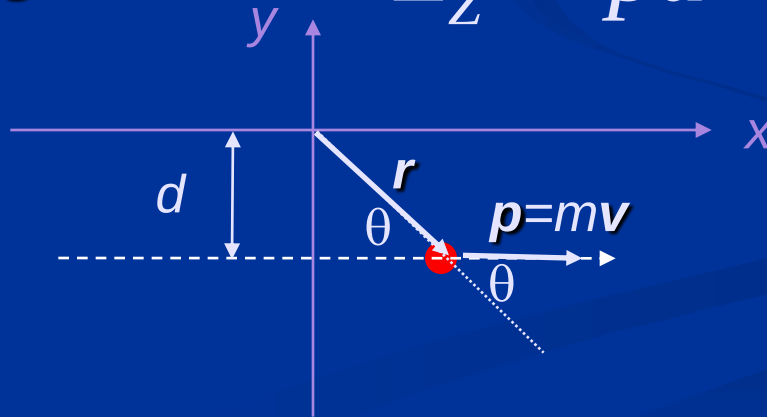


Serbestçe hareket eden bir parçacığın açısal momentumu...

- Bulmamız gereken $L = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$
- Açısal momentumun büyüklüğü:

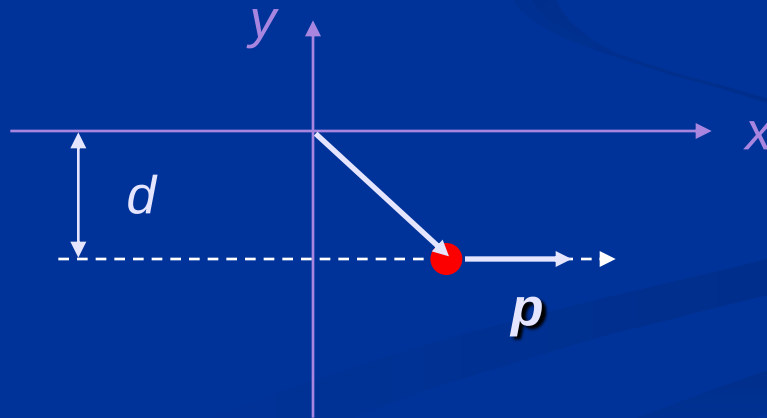
$$|L| = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = r p \sin \theta = p [r \sin \theta] = p d = p y \text{ (mesafe)}$$

- $\mathbf{r}$ ve $\mathbf{p}$ nin her ikisinde x - y düzleminde olduğundan, L nin yönü z dir (sağ el kuralı): $L_z = p d = m v d$



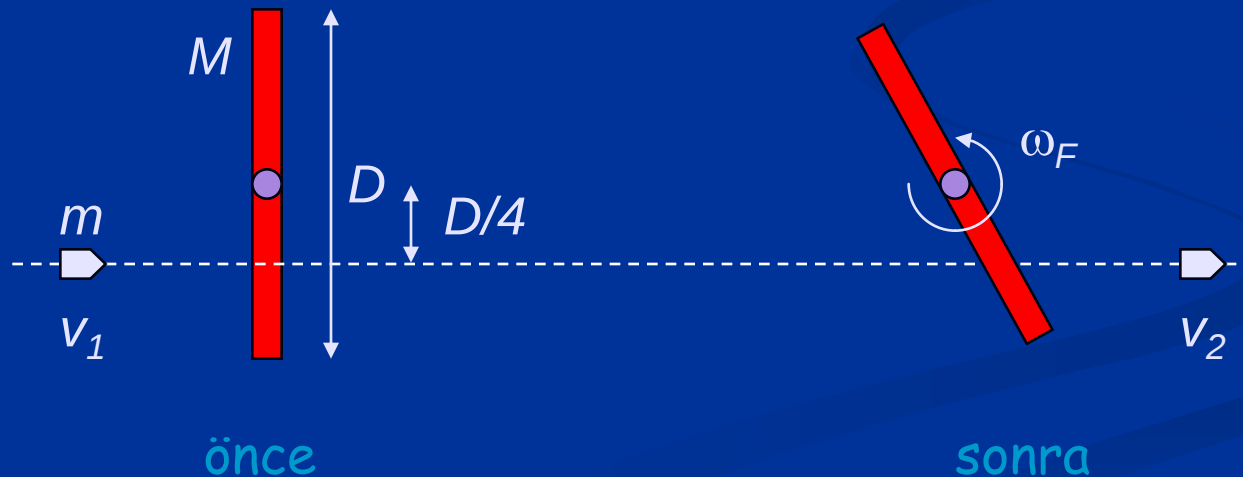
Serbestçe hareket eden bir parçacığın açısal momentumu...

- Gördük ki L nin yönü z eksenini yönündedir, ve büyüklüğü $L_z = pd = mvd$ ile verilir.
- Açıkça L korunumludur, zira d (parçacığın orijine olan en yakın uzaklığı) ve p (momentumun korunumu) sabittir.



Örnek: Sopaya çarpan kurşun

- Kütle M ve uzunluğu D olan bir sopa merkezinde dönecek şekilde yerleştirilmiştir. Kütle m olan bir kurşun sopayı dönme noktası ve ucu arasında tam ortadan vurur. Kurşunun ilk hızı v_1 , ve son hızı v_2 dir.
 - Çarpışmadan sonra sopanın açısal hızı ω_F nedir? (gravitasyon ihmal ediliyor.)



Örnek: Sopaya çarpan kurşun...

- Dönme eksenini (z -ekseni) etrafında açısal momentum korunur!
- Çarpışmadan önce sopa dönmediğinden toplam açısal momentum sadece kurşundan dolayıcıdır.

$$L_i = p \times (\text{en yakın mesafe}) = mv_1 \frac{D}{4}$$



Örnek: Sopaya çarpan kurşun...

- z -ekseni etrafında açısal momentum korunur!
- Çarpışmadan sonra toplam açısal momentum hem kurşundan hem de sopadan dolayı mevcuttur.

- $L_f = mv_2 \frac{D}{4} + I\omega_F$ burada I sopanın dönme eksenini etrafındaki eylemsizlik momenti.



sonra

Örnek: Sopaya çarpan kurşun...

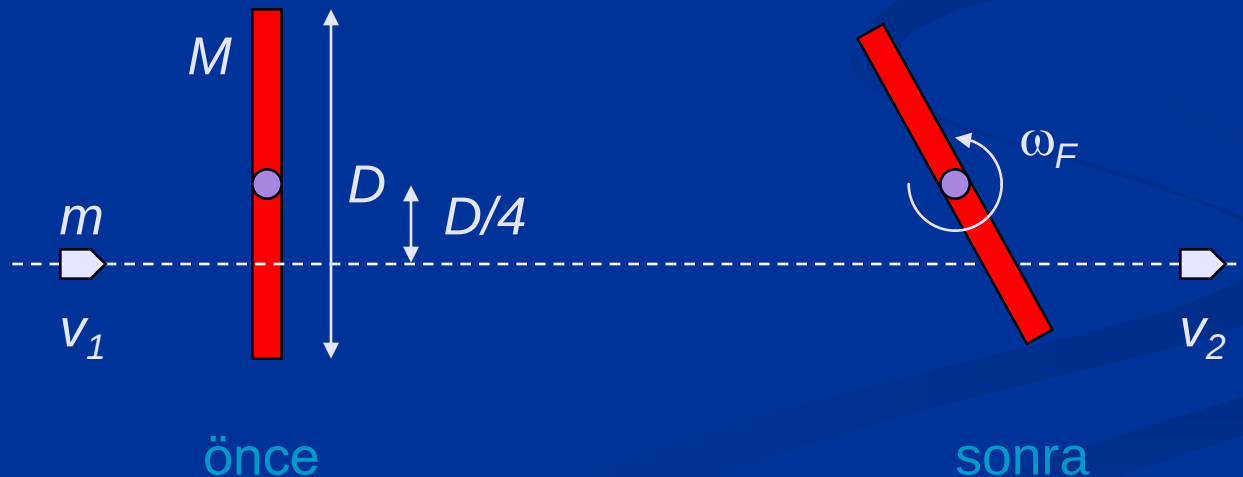
- L korunumundan $\rightarrow L_i = L_f$

$$I = \frac{1}{12}MD^2$$

$$mv_1 \frac{D}{4} = mv_2 \frac{D}{4} + \frac{1}{12}MD^2 \omega_F$$

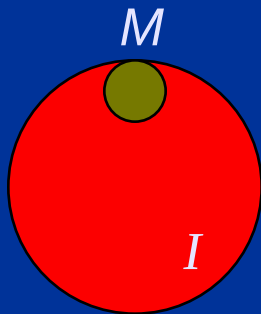


$$\omega_F = \frac{3m}{MD}(v_1 - v_2)$$

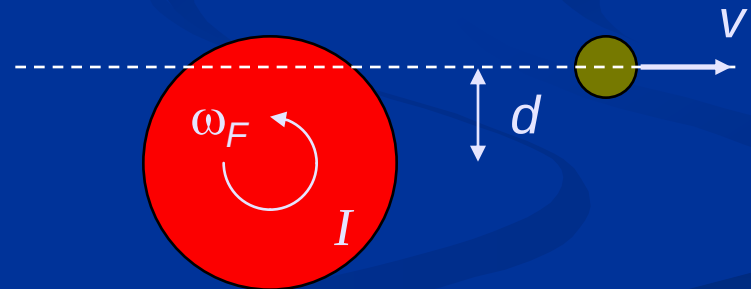


Örnek: İskemleden top fırlatmak

- Serbestçe dönebilen bir iskemleye bir öğrenci oturur. Öğrenci ve iskemle sisteminin eylemsizlik momenti I olarak verilir. Öğrenci kütlesi M olan ağır bir topu v hızı ile öyle fırlatır ki hız vektörü iskemlenin dönme ekseninden d mesafesinden geçer.
- Öğrenci topu fırlattıktan sonra öğrenci ve iskemle sisteminin açısal hızı ω_F nedir?



Önce (tepeden)



sonra

Örnek: İskemleden top fırlatmak...

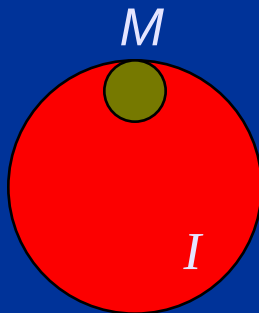
- Dış tork olmadığından toplam açısal momentum korunumludur:

- $L_i = 0$

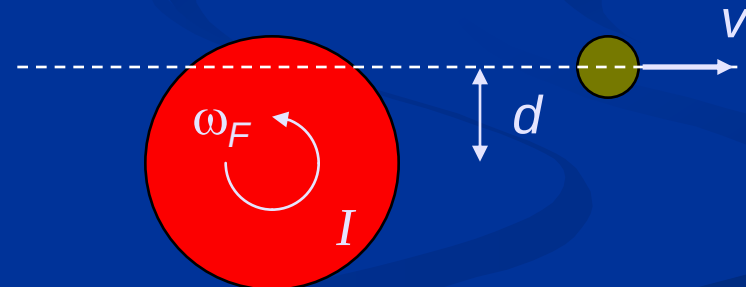
- $L_f = 0 = I\omega_F - Mvd$



$$\omega_F = \frac{Mvd}{I}$$



Önce (tepeden)



sonra

Ders 19, Soru 3

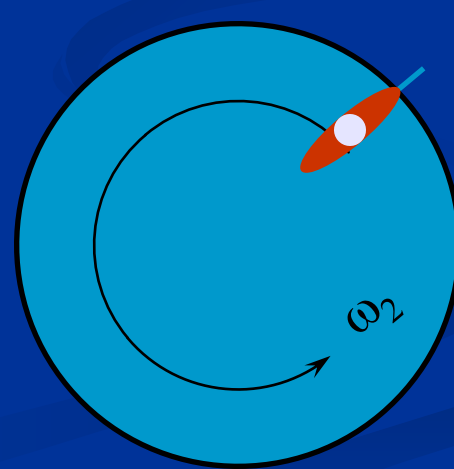
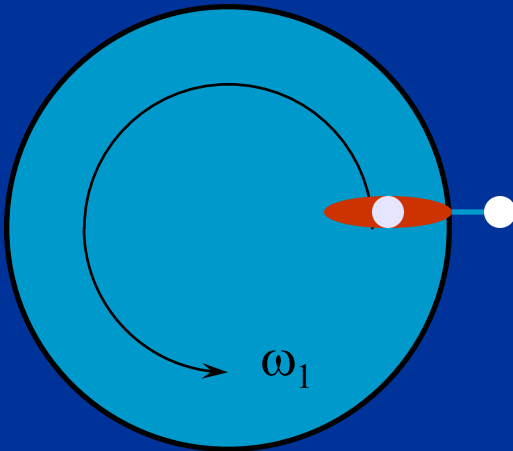
Açısal Momentum

- Bir atlı karıncada sabit ω hızı ile dönmekte iken elinde tuttuğu bir topu serbest bırakan çocuğun açısal momentum nasıl değişir?

(a) artar

(b) azalır

(c) aynı kalır



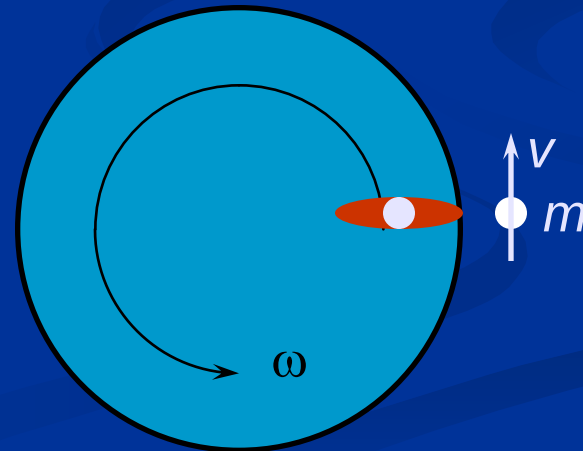
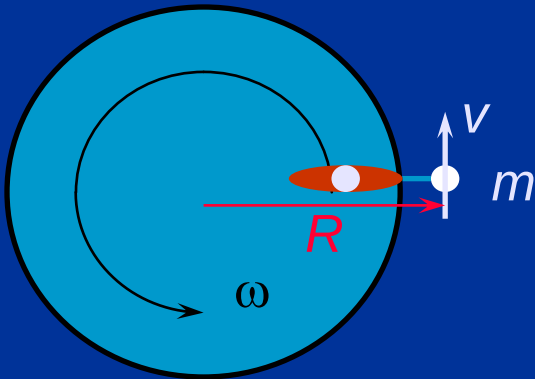
Ders 19, Soru 3

Çözüm

- Çocuk atlı karınca ve top sisteminin toplam açısal momentumu: $L_{NET} = L_{AK} + L_{ÇCK} + L_{TOP}$

Önce: $L_{TOP} = I\omega = (mR^2) \left(\frac{v}{R} \right) = mvR$

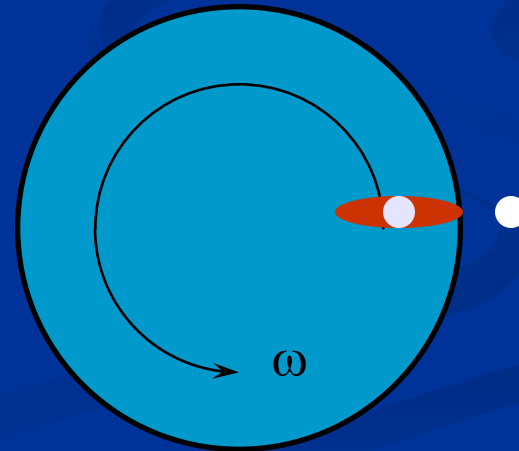
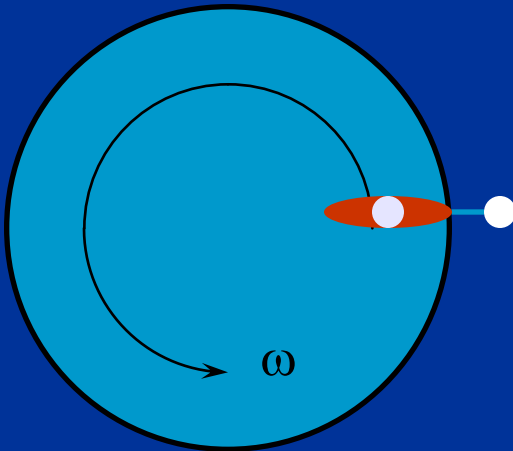
sonra $L_{TOP} = mvR$ ← aynı



Ders 19, Soru 3

Çözüm

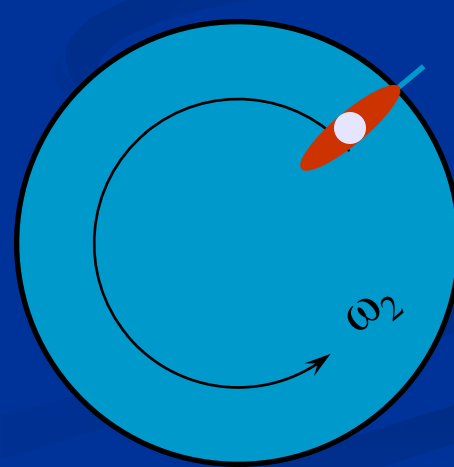
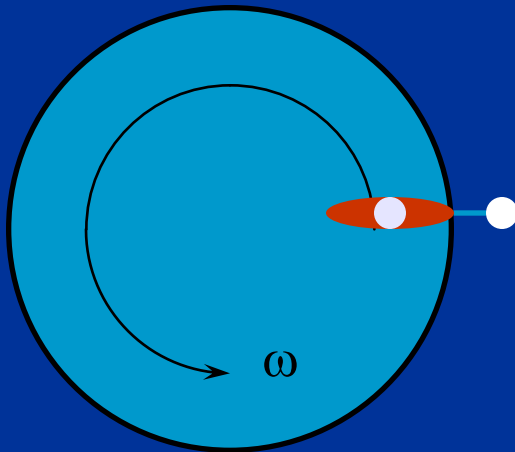
- Önce & sonra L_{TOP} aynı olduğundan, w aynı kalmalıdır ki "sistemin toplam" L_{NET} değişmesin.



Ders 19, Soru 3

Kavramsal Çözüm

- Topu bırakmak atlı karıncaya hiç bir kuvvet uygulamayacağından açısal momentumunun değişmesi söz konusu değil.



Özet

- Açısal Momentum:
 - Tanım & Türetmeler
 - Anlamı nedir?
- Sabit bir eksen etrafında dönme
 - $L = I\omega$
 - Örnek: 2 disk
 - Dönen iskemlede bir öğrenci
- Serbest hareket eden bir cismin açısal momentumu
 - Değneğe çarpan kurşun
 - Top fırlatan öğrenci