

Fizik 101: Ders 17

Ajanda

- Dönme hareketi
- Yön ve sağ el kuralı
- Rotasyon dinamiği ve tork
- Örneklerle iş ve enerji

Dönme ve Lineer Kinematik Karşılaştırma

açısıl	lineer
$\alpha = \text{sabit}$	$a = \text{sabit}$
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$
Rotasyon ekseninden R uzaklığında bir nokta için:	
$x = R\theta \quad v = \omega R \quad a = \alpha R$	

Örnek:

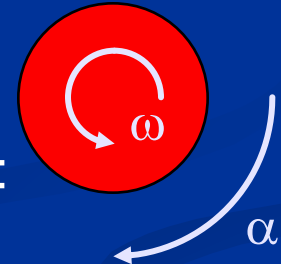
- Bir teker A $\omega_0 = 500 \text{ rad/s}$ lik ilk hız ile dönmektedir. $t = 0$ da 0.5 rad/s^2 lik bir ivme ile yavaşlamaya başlar. Durana kadar ne kadar zaman geçer?

➤ Başlangıç hızı $\alpha = -0.5 \text{ rad/s}^2$.

➤ Hız formülü $\omega = \omega_0 + \alpha t$ kullanarak $\omega = 0$:

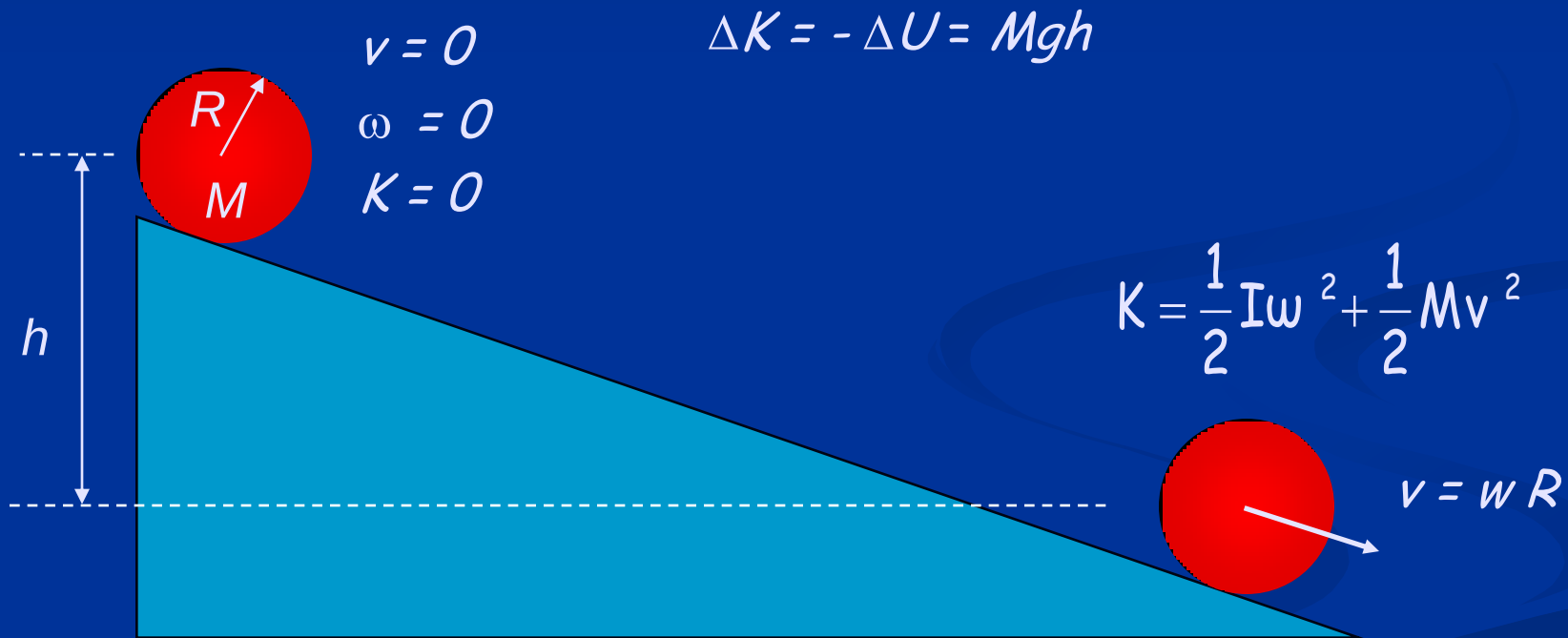
$$t = -\frac{\omega_0}{\alpha}$$

➤ Bu durumda $t = \frac{500 \text{ rad/s}}{0.5 \text{ rad/s}^2} = 1000 \text{ s} = 16.7 \text{ dak}$



Yuvarlanma Hareketi

- Eğik düzlemde eylemsizlik momentleri I olan farklı cisimlerin yuvarlanması:



Yuvarlanma...

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 \quad \text{burada } v = \omega R \text{ ve } I = cMR^2.$$

çember: $c = 1$
disk: $c = 1/2$
küre: $c = 2/5$
vs...

$$K = \frac{1}{2}cMR^2\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}(c+1)Mv^2$$



$$\frac{1}{2}(c+1)Mv^2 = Mgh \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{1}{c+1}}$$

Yuvarlanma hızı her zaman kaymadan daha azdır. Çünkü kinetik enerji dairesel hareket ve KM yer değiştirme hareketince paylaşılmaktadır.

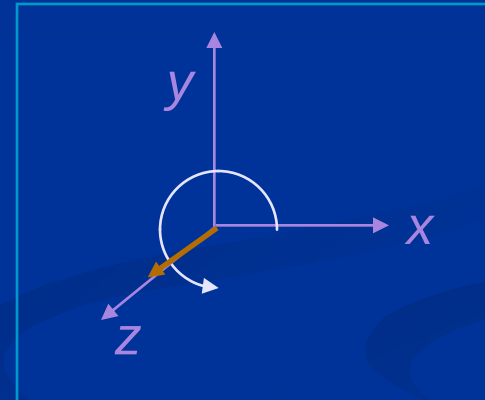
Örnek

- Rampada yuvarlanan farklı cisimlerin hızı...

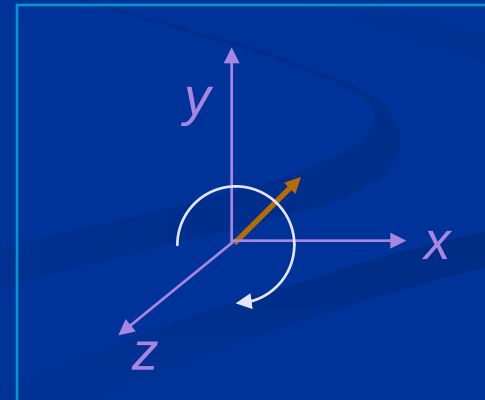
Rotasyonun Yönü

- Genelde rotasyon değişkeni vektördür (ve yönü vardır)
- Eğer rotasyon x - y düzleminde ise kuralımız:

- Saat tersi yönündeki rotasyon $+z$ yönünde

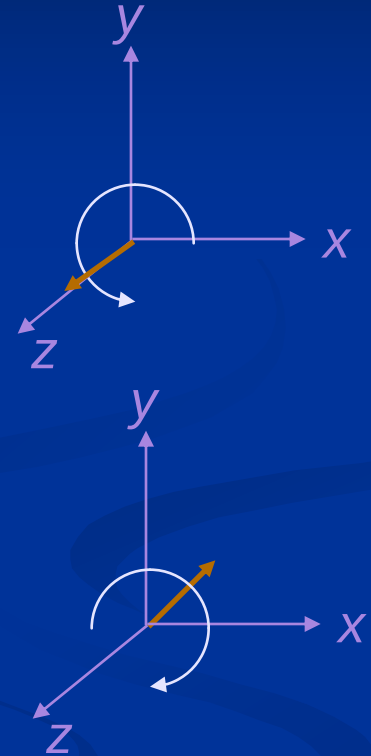


- Saat yönündeki rotasyon $-z$ yönünde



Rotasyonun Yönü: Sağ el kuralı

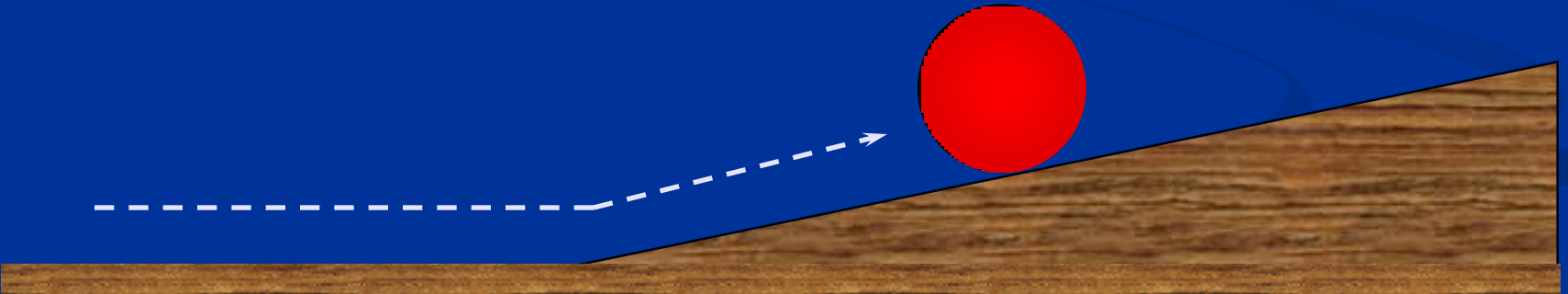
- Rotasyon vektörünün hangi yöne doğru olduğunu bulmak için sağ elinizin parmaklarını cismin döndüğü yönde kıvrırın. Baş parmak rotasyonun yönünü yönünü gösterecektir!
- Genelde **z-eksenini** rotasyon eksenini olarak seçeriz. (şekildeki gibi)
 - $\theta = \theta_z$
 - $\omega = \omega_z$
 - $\alpha = \alpha_z$
- Gerekmediği sürece kolaylık olsun diye indisleri kullanmayız..



Ders 17, Soru 1

Rotasyon

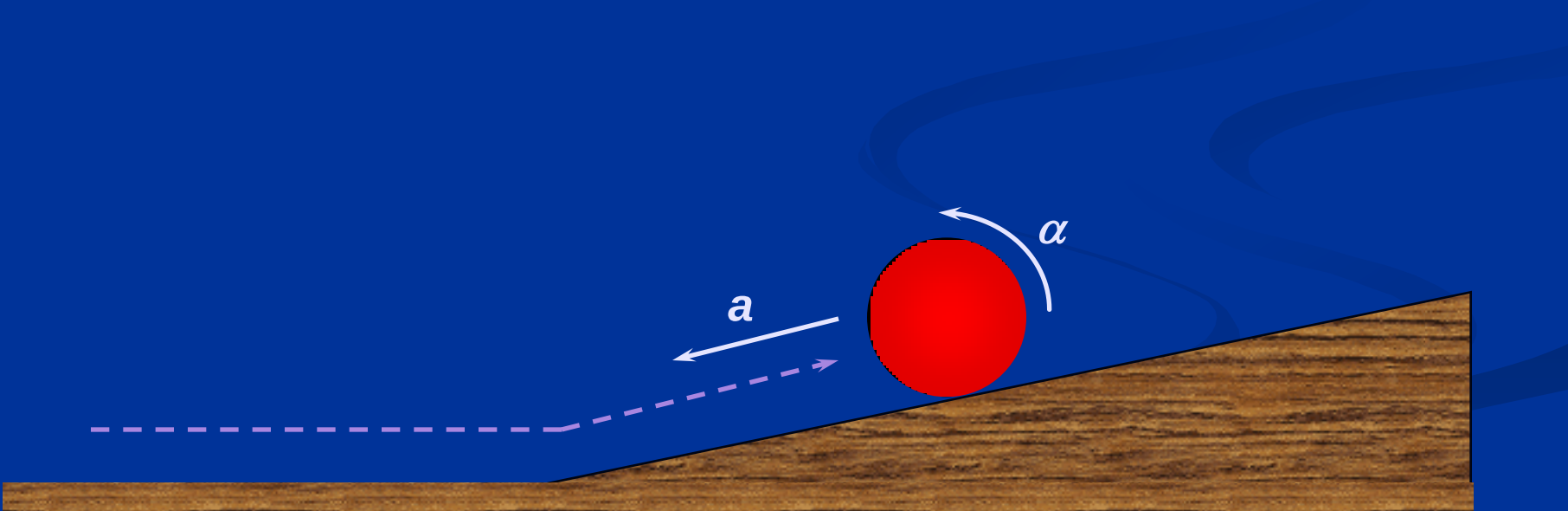
- Verde yuvarlanan bir küre bir süre sonra eğik düzlemde rampa yukarı yuvarlanmaya başlar. (şekildeki gibi). Top rampa yukarı yuvarlanırken açısal ivmenin yönü nedir?
 - (a) Rampadan aşağı
 - (b) Sayfadan içe
 - (c) Sayfadan dışa



Ders 17, Soru 1

Rotasyon

- Top eğik düzlemde iken lineer ivme yer çekiminden ötürü hep aşağı doğrudur.
- Dolayısıyla açısal ivme saat tersi yöndedir.
- Sağ el kuralını kullanarak α sayfa düzleminden dışa doğru buluruz!



Rotasyon Dinamiği: Döndüren nedir?

- Farzı muhal bir kütleye etki eden bir kuvvet dairesel bir yörüngede harekete zorluyor. Belli bir anda yörüngeye teğet yöndeki ivmesi:

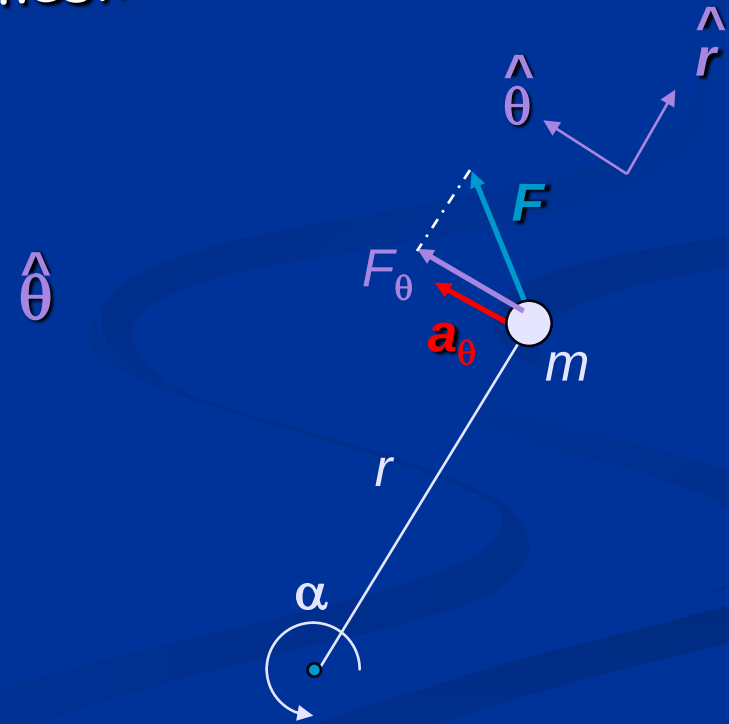
- $\mathbf{a}_\theta = \alpha \mathbf{r}$

- Şimdi Newtonun 2. yasasını $\hat{\theta}$ yönünde kullanarak:

- $F_\theta = m \mathbf{a}_\theta = m \alpha r$

- r ile çarparak:

$r F_\theta = m r^2 \alpha$



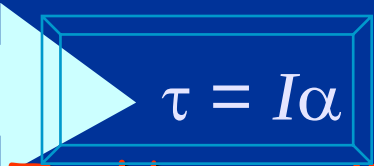
Rotasyon Dinamiği: Döndüren nedir?

$$rF_{\theta} = mr^2\alpha \quad \text{ve} \quad I = mr^2$$

$$= I\alpha$$

■ **tanım tork**: $\tau = rF_{\theta}$.

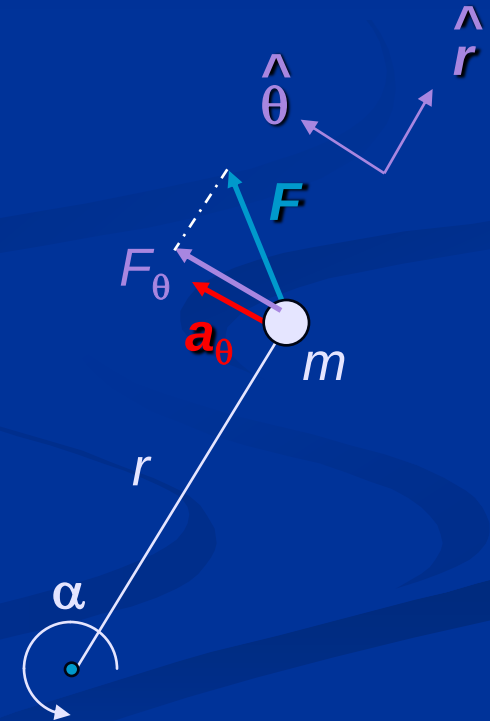
■ τ **dik kuvvet** F_{θ} kere uzaklık r .


$$\tau = I\alpha$$

■ **Tork'un yönü** :

■ **+z** eğer sistemi **saatin tersi yönünde** döndürmeye çalışırsa.

■ **-z** eğer sistemi **saat yönünde** döndürmeye çalışırsa.



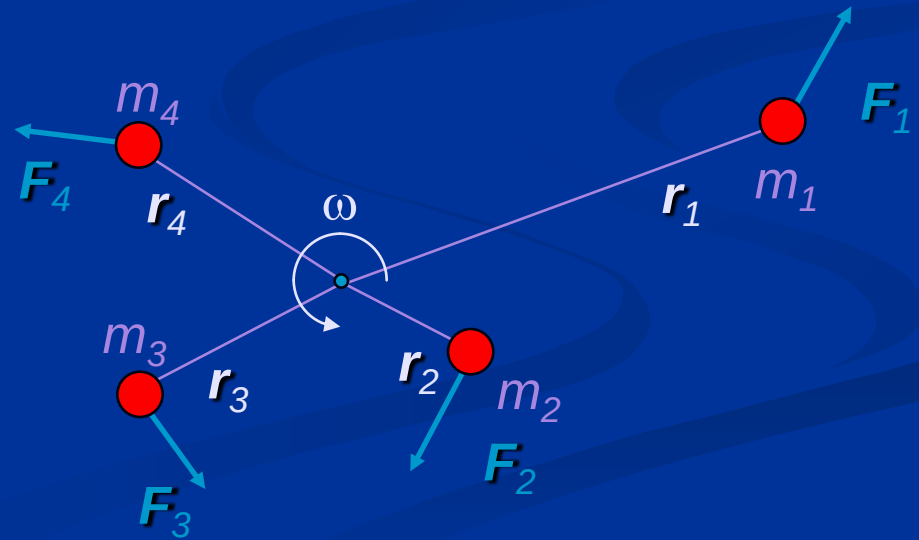
Rotasyon Dinamiği: Döndüren nedir?

- Katı halde çok parçacıklı sistem için: $\sum_i \underbrace{r_i F_{i,\theta}}_{\tau_i} = \sum_i \underbrace{m_i r_i^2}_I \alpha_i$

- Parçacıklar sabit olarak birbirine bağlandığından hepsinin de ivmesi aynıdır α .

$$\sum_i \tau_i = I \alpha$$

$$\tau_{\text{net}} = I \alpha$$



Rotasyon Dinamiği: Döndüren nedir?

$$\tau_{\text{net}} = I\alpha$$

- $F_{\text{net}} = ma$ için rotasyon analogu.
- **Tork kuvvetin rotasyon analogu:**
 - Kuvvetçe sağlanan "burulma" miktarı.
- **Eylemsizlik momenti I , kütlenin rotasyon analogu.**
 - Eğer I büyükse istenen ivmeye ulaşmak için daha büyük tork gereklidir.
- Tork birimi $\text{kg m}^2/\text{s}^2 = (\text{kg m}/\text{s}^2) \text{ m} = \text{Nm}$.

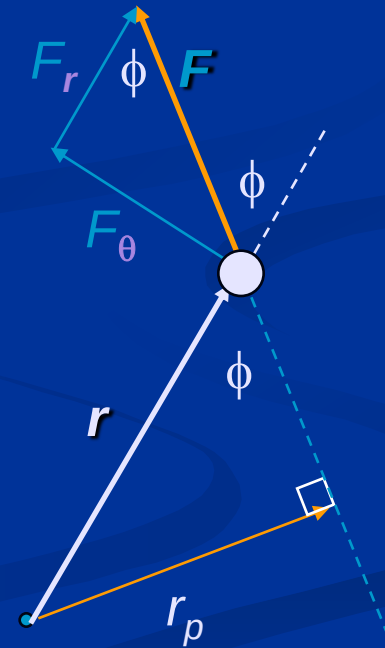
Tork

□ Tork tanımından:

$$\tau = r F_{\theta}$$

$$= r F \sin \phi$$

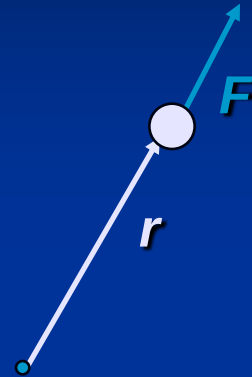
$$= r \sin \phi F$$



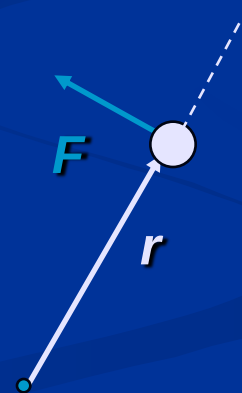
Tork

$$\tau = r F \sin \phi$$

- Eğer $\phi = 0^\circ$, ise $\tau = 0$



- Eğer $\phi = 90^\circ$, ise $\tau = \text{maksimum}$

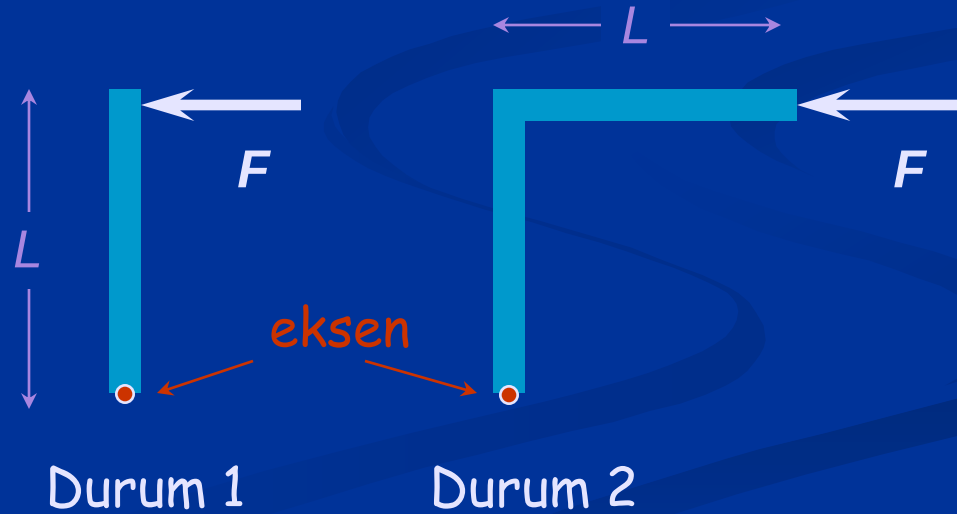


Ders 17, Soru 2

Tork

- Aşağıdaki durumlardan hangisinde dönme eksenini etrafında uygulanan kuvvetin torku daha büyüktür? Her iki durumda da uygulanan kuvvetin büyüklüğü ve yönü aynıdır.

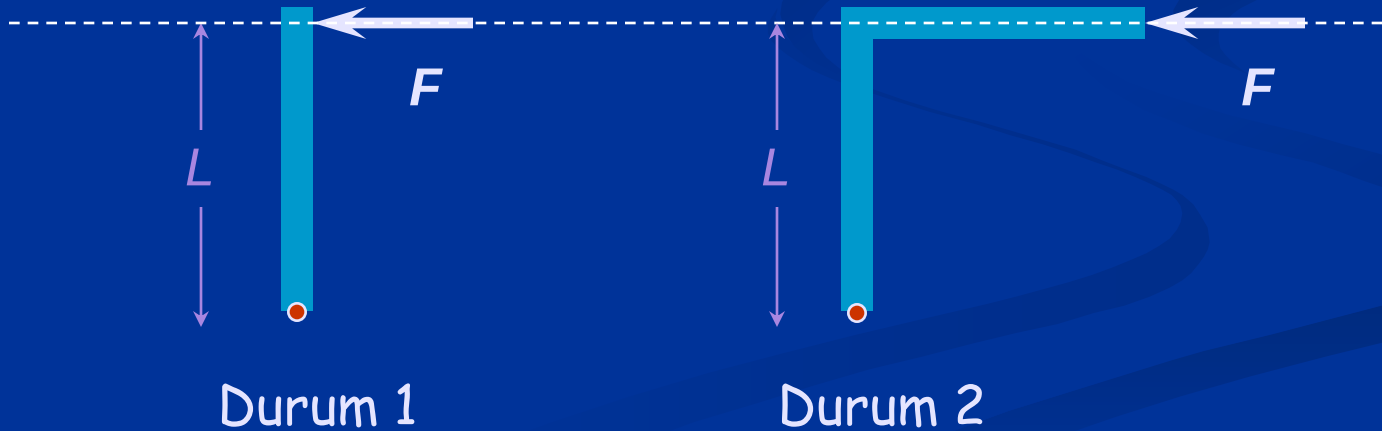
- (a) durum 1
- (b) durum 2
- (c) aynı



Ders 17, Soru 2

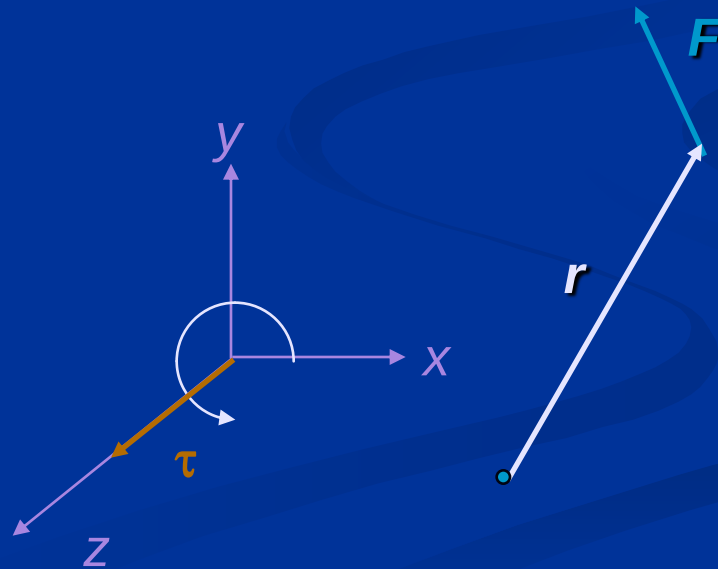
Çözüm

➡ Tork aynı!



Tork ve Sağ El Kuralı:

- Sağ el kuralı ile Tork'un yönünü tayin ederiz:
 - Elinizi dönme ekseninden kuvvetin uygulandığı yöne doğru yöneltin.
 - Parmaklarınızı kuvvet yönünde döndürün.
 - Baş parmağınız tork'un yönünü gösterecektir..

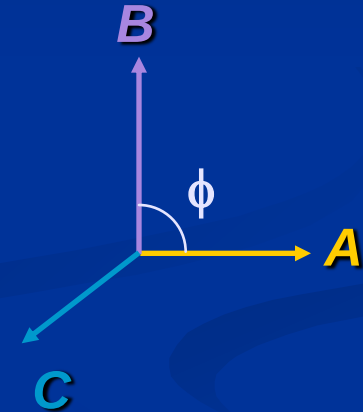


Vektörel (Çapraz) Çarpım

- Tork'un vektörel doğasını çapraz (vektörel) çarpım ile tanımlayabiliriz.
 - İki vektörün çapraz çarpımı 3. bir vektör verir:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

- Sonuç vektör $\mathbf{C}$ büyüklüğü:
 $C = AB \sin \phi$

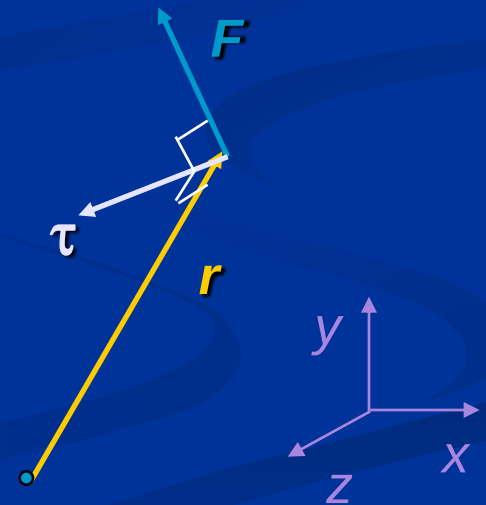


- Sonuç vektörün $\mathbf{C}$ yönü $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ vektörlerinin bulunduğu düzleme diktir ve yönü sağ el kuralı ile bulunur.

Tork & Çapraz Çarpım

- Tork'u yeniden tanımlarsak:

$$\begin{aligned}\tau &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= rF \sin \phi\end{aligned}$$

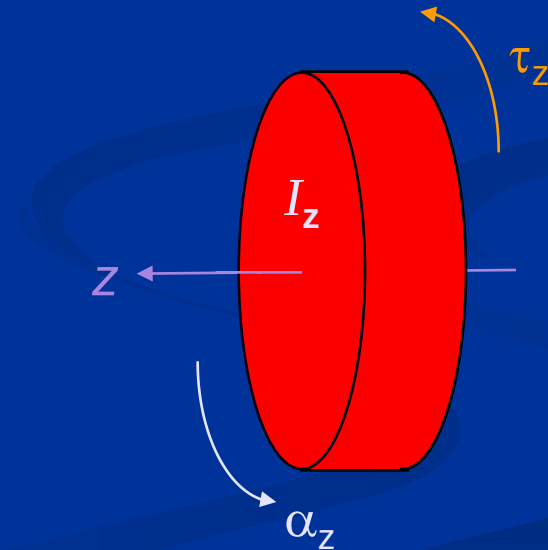


$$\tau = I\alpha \text{ üzerine...}$$

- Tork' $\tau = I\alpha$ şeklinde yazarsak genelde z bileşenini kastederiz. (z -eksenini dönme eksenini olarak seçeriz.)

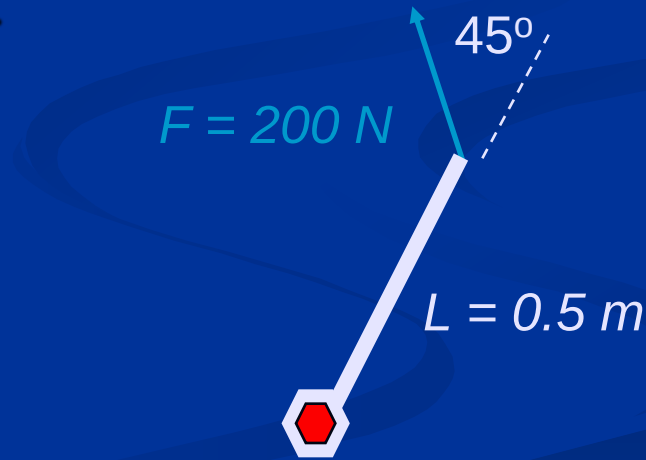
$$\tau_z = I_z \alpha_z$$

- Genellikle kolaylık için z indisi yazılmaz.



Örnek

- Sıkılmış bir somun'u (büyük vida) gevşetmek için 50 cm uzunluğundaki bir anahtar ile somuna 45° derecede 200 N kuvvet uygulanıyor.
 - Somun üzerine uygulanan tork'un büyüklüğü nedir?
 - Eğer somun aniden serbest dönmeye başlarsa, anahtarın açısal ivmesi nedir? (Anahtarın kütlesi 3 kg, ve şekli ince bir çubuktur).



Örnek

❑ Tork $\tau = LF \sin \phi = (0.5 \text{ m})(200 \text{ N})(\sin 45) = 70.7 \text{ Nm}$

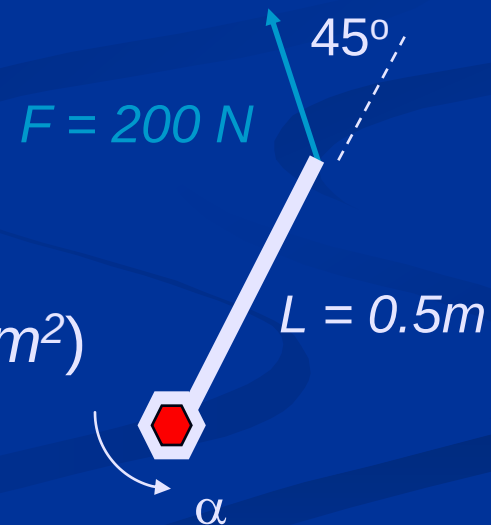
➤ Somun serbest dönerse, $\tau = I\alpha$

➤ Tork'u τ biliyoruz ve α bulmak için I_y hesaplamalıyız

$$I = \frac{1}{3}ML^2 = \frac{1}{3}(3 \text{ kg})(0.5 \text{ m})^2 = 0.25 \text{ kgm}^2$$

$$\rightarrow \alpha = \tau / I = (70.7 \text{ Nm}) / (0.25 \text{ kgm}^2)$$

$$\alpha = 283 \text{ rad/s}^2$$



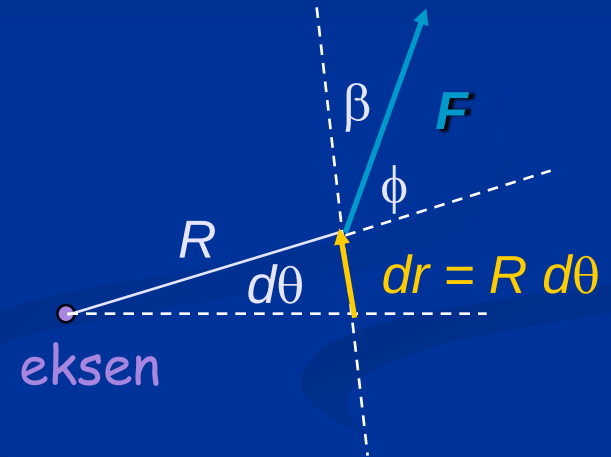
İş

- Sabit bir eksen etrafında dönmeye zorlanan bir diske etki eden F kuvvetinin yaptığı iş sonsuz küçük bir açısal yer değiştirme $\delta\theta$ için nedir?

- $dW = F \cdot dr = F R \delta\theta \cos(\beta)$
 $= F R \delta\theta \cos(90 - \phi)$
 $= F R \delta\theta \sin(\phi)$
 $= F R \sin(\phi) \delta\theta$

$$dW = \tau \delta\theta$$

- İş için integre edersek: $W = \tau\theta$
- Çizgisel işe benzer $W = F \cdot \Delta r$
- W negatiftir eğer τ ve θ zıt yönlerde ise!



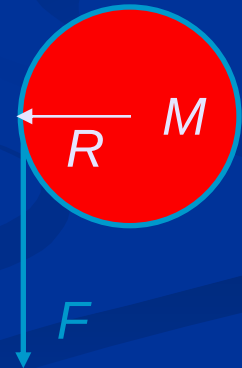
İş & Kinetik Enerji

- İş/Kinetik enerji teoremi: $\Delta K = W_{NET}$
- Bu genel olarak doğrudur ve hem çizgisel hem de dairesel hareket için geçerlidir.
- Sabit bir eksen etrafında dönen bir cisim için:

$$\Delta K = \frac{1}{2} I (\omega_f^2 - \omega_i^2) = W_{net}$$

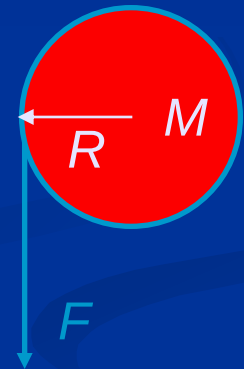
Örnek: Disk & İp

- Kütle $M=40\text{ g}$ ve yarıçapı $R=10\text{ cm}$ olan bir diskin etrafına kütsüz bir ip 10 kez sarılıyor. Disk merkezinden geçen eksen etrafında sürtünmesiz dönmektedir. İp $F=10\text{ N}$ luk bir kuvvetle çözülene kadar çekiliyor. (İpin kaymadığını ve diskin başlangıçta dönmediğini kabul edelim.)
 - İp çözüldüğünde diskin dönme hızı nedir?



Disk & İp...

- Yapılan iş $W = \tau \theta$
 - Tork $\tau = RF$ (çünkü $\phi = 90^\circ$)
 - Açısal yer değiştirme θ
 $2\pi \text{ rad/tur} \times 10 \text{ tur}$.
- $W = \underbrace{(.1 \text{ m})(10 \text{ N})}_{\tau} \underbrace{(20\pi \text{ rad})}_{\theta} = 62.8 \text{ J}$



Disk & İp...

$$W_{NET} = W = 62.8 \text{ J} = \Delta K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Merkezinden geçen eksen etrafında dönen dönen
Disk için I:

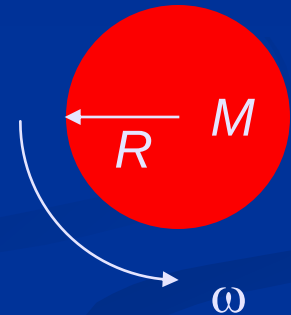
$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

$$\rightarrow \Delta K = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \omega^2 = W$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4W}{MR^2}} = \sqrt{\frac{4(62.8\text{J})}{(.04\text{kg})(1)^2}}$$



$$\omega = 792.5 \text{ rad/s}$$

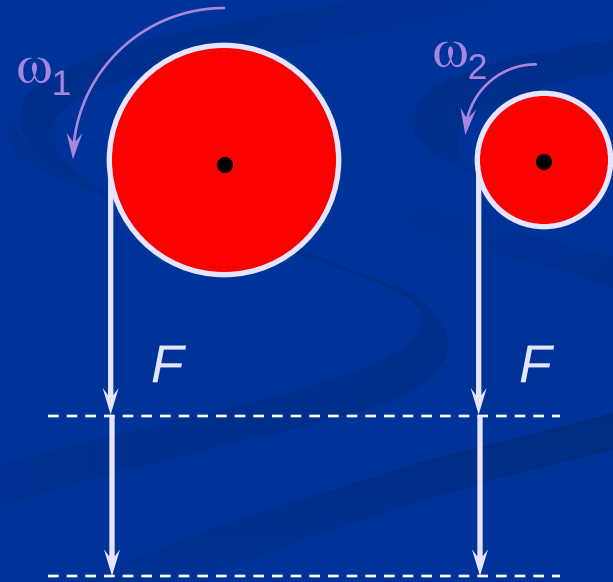


Ders 17, Soru 3

İş & Enerji

- Disklerin çevresine ip bağlayıp aynı kuvvetle bir süre aynı mesafede çekiliyor. Disk 1'in yarı çapı daha büyüktür ve her iki diskin **eylemsizlik momenti** aynıdır. Her iki diskte merkezinden geçen bir eksen etrafında dönmekte ve başlangıçta durgundurlar.
 - Çekmeden sonra hangi diskin açısal hızı daha büyüktür?

- (a) disk 1
- (b) disk 2
- (c) aynı



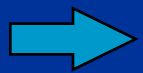
Ders 17, Soru 3

Çözüm

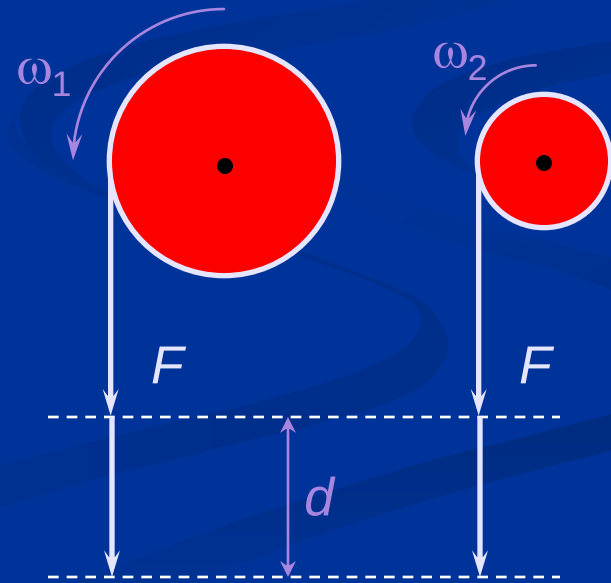
- Yapılan iş her iki disk içinde aynıdır!
 $W = Fd$
- Kinetik enerjideki değişiklik aynı olacaktır, zira $W = \Delta K$.

Biliyoruz ki $\Delta K = \frac{1}{2} I \omega^2$

Ve $I_1 = I_2$



$$\omega_1 = \omega_2$$



Özet

- Dönme hareketi
- Yön ve sağ el kuralı
- Rotasyon dinamiği ve tork
- Örneklerle iş ve enerji