

Fizik 101: Ders 16

Konu: Katı cismin dönmesi

- Dönme kinematığı
 - Bir boyutlu kinematik ile benzeşim
- Dönen sistemin kinetik enerjisi
 - Eylemsizlik momenti
 - Ayırık parçacıklar
 - Sürekli katı cisimler
- Paralel eksen teoremi

Rotasyon

- Şimdiye kadarki konularımızda cisimlerin belirli bir eksen etrafında dönmesini üzerine çok durmadık. (öteleme hareketi ağırlıklıydı)
 - Kayan cisimleri inceledik.
 - Makaraların kütlelerini yok saydık.
- Rotasyon oldukça önemlidir, dolayısıyla rotasyonu anlamalıyız!
- Türeteceğimiz denklemlerin pek çoğu lineer kinematik ve dinamikte çıkardığımız denklemlerin benzerleridir.

Katı Cismin Dönmesi

- Şekildeki katı cisim z eksenini etrafında döndürülmeye başlarsın, bu katı silindir üzerinde P noktası alırsak bu noktanın yaptığı hareket dairesel harekettir.

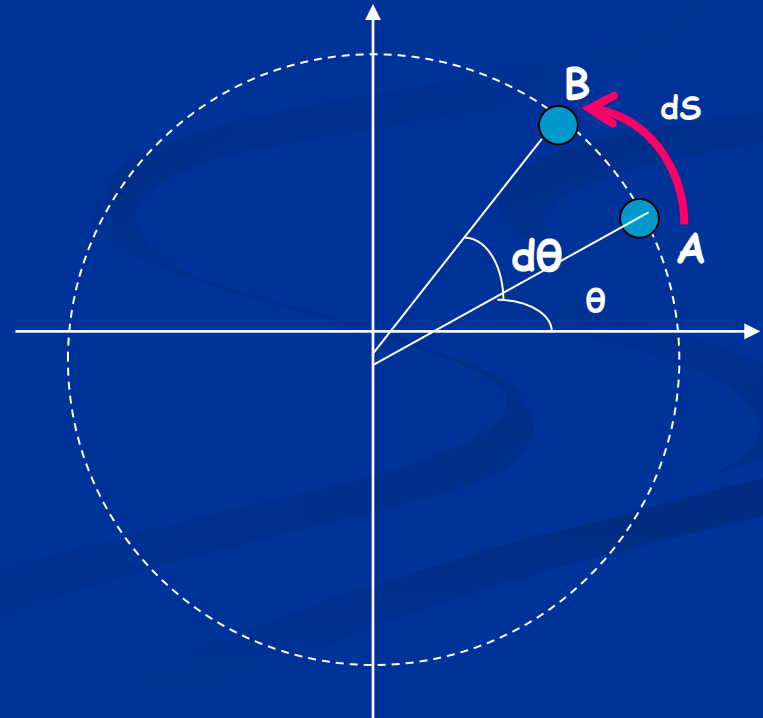


- P noktası Δt zamanında A noktasından B noktasına gekirse:

$$v_{\text{ort}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{R \Delta \theta}{\Delta t} = R \omega_{\text{ort}} \text{ ortalama hiz.}$$

$$v_{\text{ani}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R \omega_{\text{ani}}$$

$$a_{\text{ani}} = \frac{dv_{\text{ani}}}{dt} = R \frac{d^2\theta}{dt^2} = R \frac{d\omega}{dt} = R \alpha$$



Rotasyon Değişkenleri.

- Sabit eksen etrafındaki rotasyon:
 - Merkezinden geçen eksen etrafında dönen bir diske bakalım:



- Öncelikle Düzgün Dairesel Hareket hakkında öğrendiklerimizi hatırlayalım:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

(lineer hıza benzer $v = \frac{dx}{dt}$)

Rotasyon Değişkenleri...

■ Farz-ı muhal ω zamanın bir fonksiyonu olsun:

■ Açısal ivme tanımı:

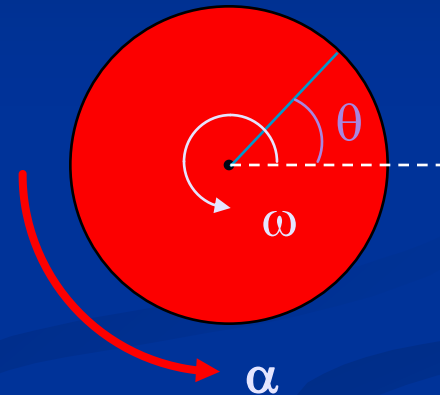
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \text{ rad/s}^2$$

- Açısal ivme α nin sabit olduğu durumu dikkate alalım.
- Bunu integre ederek ω ve θ yı zamanın bir fonksiyonu olarak buluruz:

$$\alpha = \text{sabit}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$



Rotasyon Değişkenleri...

$$\alpha = \text{sabit}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

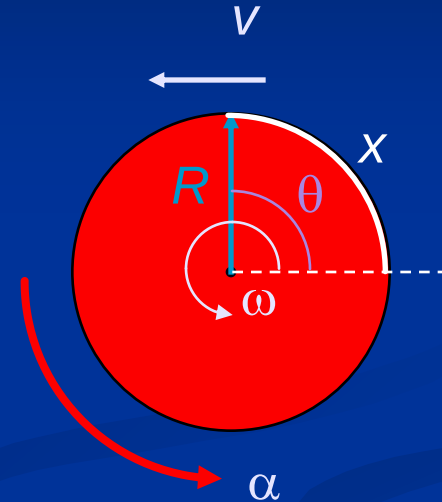
- Dönme ekseninden R uzaklıktaki bir nokta için:

- $x = \theta R$

- $v = \omega R$

Bunun türevini alarak:

- $a = \alpha R$



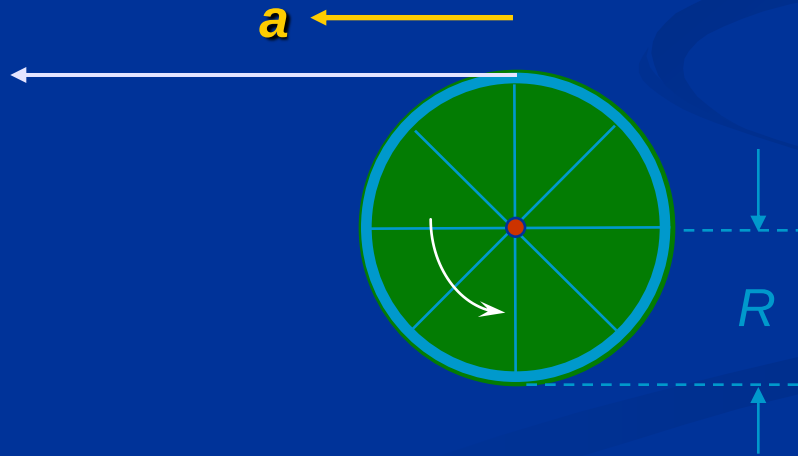
Özet

(1-D kinematikle karşılaştırma)

açısıl	linear
$\alpha = \text{sabit}$	$a = \text{sabit}$
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$
Rotasyon ekseninden R uzaklığında bir nokta için: $x = R\theta$ $v = \omega R$ $a = \alpha R$ }	

Örnek: Tekerlek ve Sicim

- Yarıçapı $R = 0.4 \text{ m}$ olan bir tekerlek sabit bir eksen etrafında serbestçe dönmektedir. Tekerleğin etrafında sarılan bir ip var. $t = 0$ anında durgunken ip sabit bir ivme $a = 4 \text{ m/s}^2$ ile çekilir. 10 saniye sonra tekerlek kaç tur döner? (Bir tur = 2π radyan)



Tekerlek ve Sicim...

Çizgisel denklemler ile:

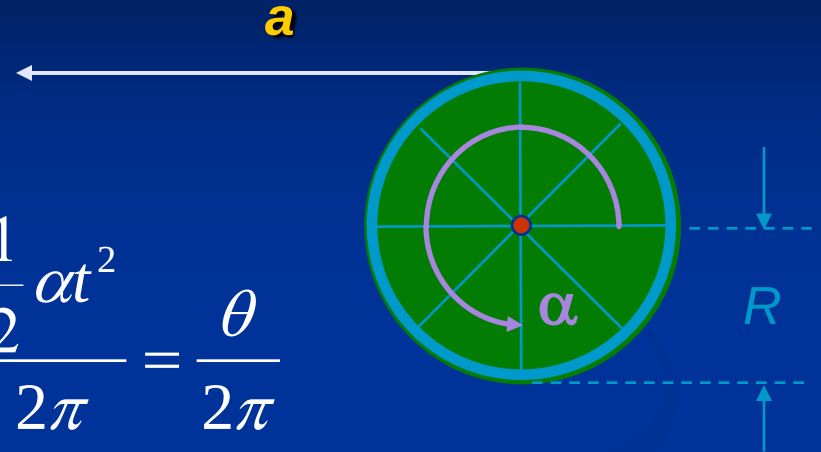
$$t_{ur} = \frac{Yol}{2\pi R} = \frac{\frac{1}{2}at^2}{2\pi R} \Rightarrow t_{ur} = \frac{\frac{a}{2R}t^2}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2}\alpha t^2}{2\pi} = \frac{\theta}{2\pi}$$

dönme denklemleri ile

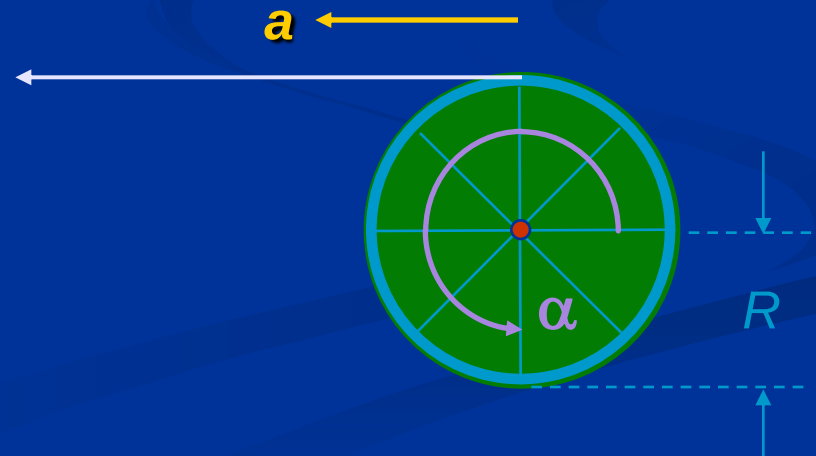
$$t_{ur} = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2}\alpha t^2}{2\pi}$$

numerik :

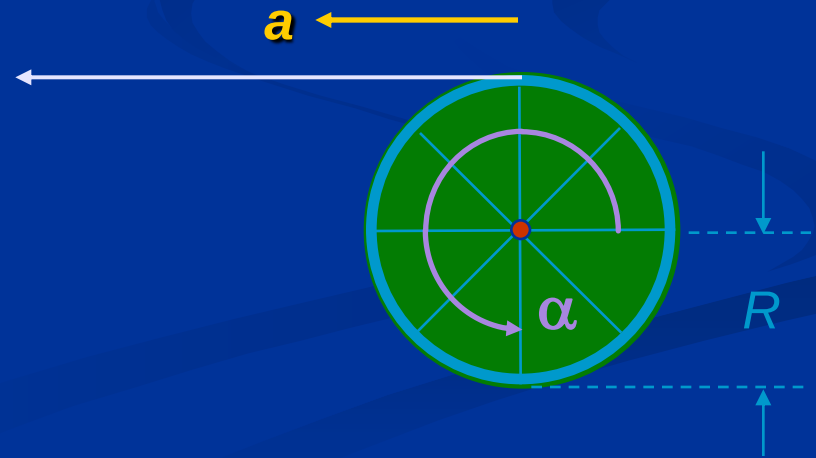
$$t_{ur} = \frac{\frac{1}{2}\alpha t^2}{2\pi} = \frac{0.5 \cdot \frac{4}{0.4} 10^2}{2 \cdot 3.14} = \frac{500}{6.28} \approx 80$$



Tekerlek ve Sicim...

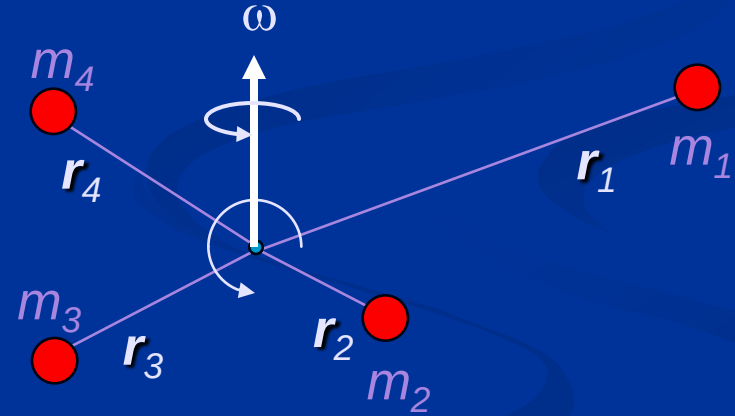


Tekerlek ve Sicim...



Rotasyon & Kinetik Enerji

- Aşağıda gösterilen basit dönen bir sistemi dikkate alalım. (Noktasal kütleler kütlesiz bir çubuğa iliştirili)
- Sistemin kinetik enerjisi her bir parçacığın kinetik enerjisinin toplamıdır:



Rotasyon & Kinetik Enerji...

■ Yani: $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ ama $v_i = \omega r_i$

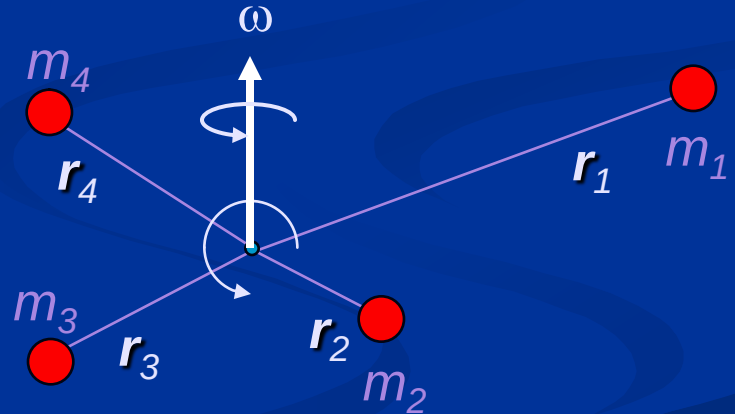
$\Rightarrow K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_i^2$

Başka bir şekilde yazım:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Dönme eksenini etrafında
eylemsizlik momenti



I nin birimi $kg\ m^2$.

Rotasyon & Kinetik Enerji...

- Dönen bir sistemin kinetik enerjisi nokta parçacığın kinetik enerjisine benziyor:

■ Nokta parçacık	Dönen sistem
$K = \frac{1}{2}mv^2$ $v \rightarrow$ "lineer" hız $m \rightarrow$ kütle.	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$ $\omega \rightarrow$ açısal hız I dönme eksenini etrafında eylemsizlik momenti. $I = \sum_i m_i r_i^2$

Eylemsizlik Momenti

sonuç $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ burada $I = \sum_i m_i r_i^2$

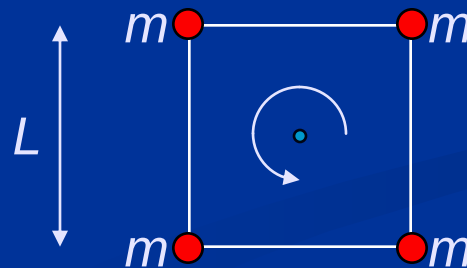
- Eylemsizlik momenti I sistemin kütle dağılımına bağlıdır.
 - Kütlenin dönme ekseninden uzaklaşması eylemsizlik momentini artırır.
- Verilen bir cisim için eylemsizlik momenti dönme eksenini nerde seçtiğimize bağlıdır. (kütle merkezinden farklı).
- Lineer dinamikteki denklemlerde m kütle yerini dönme dinamiğinde I eylemsizlik momenti alır!

Eylemsizlik Momenti Hesabı

- Sabit bir eksen etrafında dağılmış N ayrık noktasal parçacık için eylemsizlik momenti:

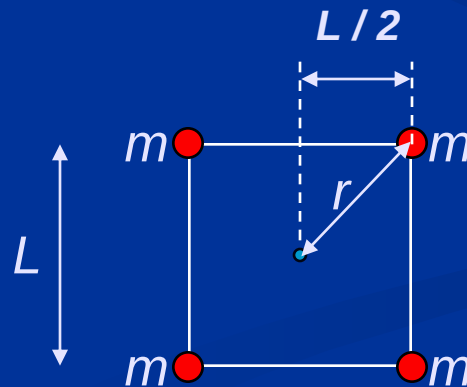
$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \quad \text{burada } r \text{ kütlenin dönme eksenine olan uzaklığı.}$$

Örnek: Kenar uzunluğu L olan bir karenin köşelerinde 4 (m) kütlesi var ve kare merkezinden geçen bir eksen etrafında dönmektedir. Kütle sisteminin eylemsizlik momentini hesaplayınız:



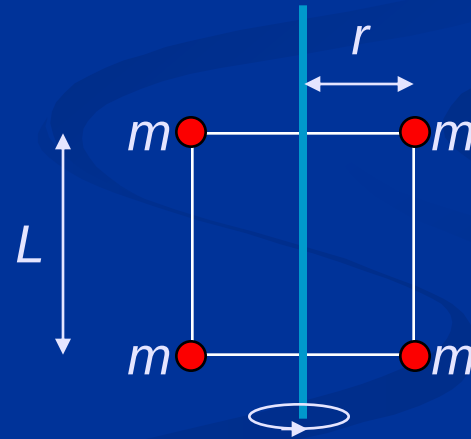
Eylemsizlik Momenti Hesabı...

$$I = \sum_{i=1}^4 m_i r_i^2 = 4 \cdot m \cdot \left(\frac{L}{2} \sqrt{2} \right)^2 \Rightarrow I = 2mL^2$$



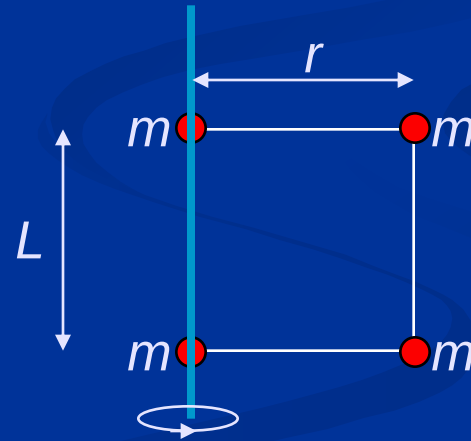
Eylemsizlik Momenti Hesabı...

- I 'yı şimdide merkezden kenara paralel olan bir dönme eksenini için hesaplayalım:



Eylemsizlik Momenti Hesabı...

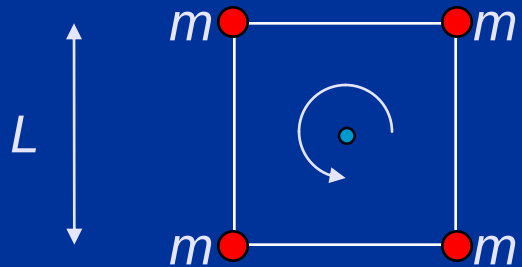
- Son olarak aynı sistemin eylemsizlik momentini bir kenarından geçen bir eksen için hesaplırsak:



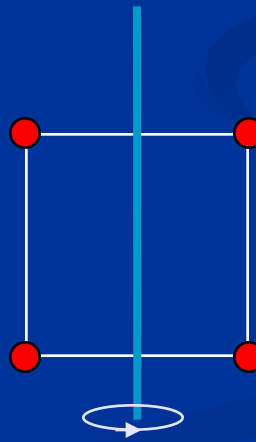
Eylemsizlik Momenti Hesabı...

- Aynı cisim için I dönme eksenine açıkça bağlıdır!!

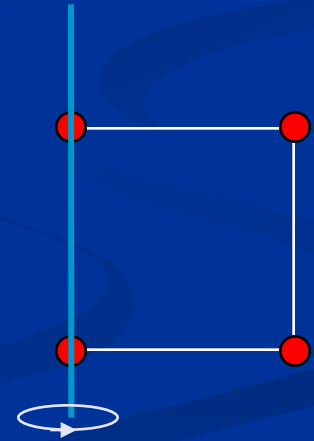
$$I = 2mL^2$$



$$I = mL^2$$



$$I = 2mL^2$$



Ders 16, Soru 1

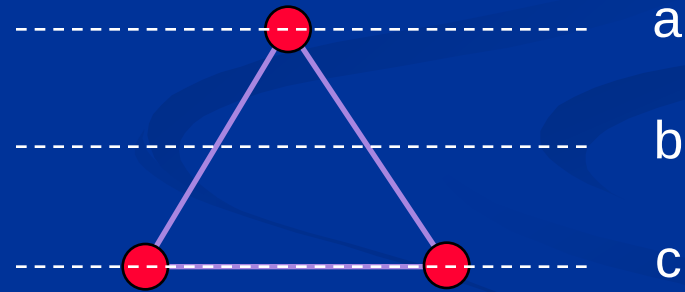
Eylemsizlik Momenti

- Üçgen şeklindeki cisim 3 özdeş kütle ve katı kütleli çubuktan oluşmaktadır. a , b , ve c eksenlerine göre eylemsizlik momenti I_a , I_b , ve I_c dir.
 - Aşağıdakilerden hangisi doğrudur:

(a) $I_a > I_b > I_c$

(b) $I_a > I_c > I_b$

(c) $I_b > I_a > I_c$



Ders 16, Soru 1

Eylemsizlik Momenti

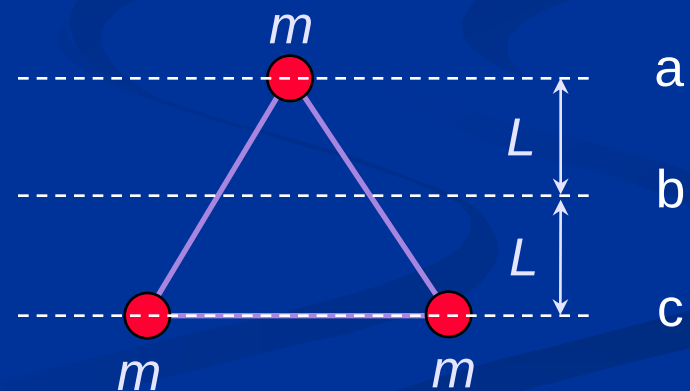
- Kütleler ve uzaklıkları işaretleyelim:
- Eylemsizlik momentini hesaplayalım:

$$I_a = m(2L)^2 + m(2L)^2 = 8mL^2$$

$$I_b = mL^2 + mL^2 + mL^2 = 3mL^2$$

$$I_c = m(2L)^2 = 4mL^2$$

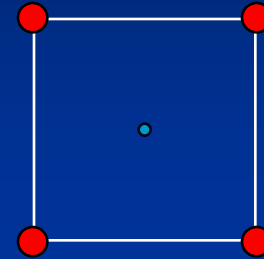
(b) doğru: $I_a > I_c > I_b$



Eylemsizlik Momenti Hesabı...

- Ayırık nokta kütleleri için eylemsizlik momenti:

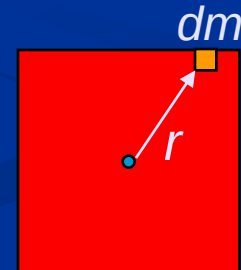
$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$



- Sürekli kütle dağılımı gösteren bir cisim için her bir sonsuz küçük dm kütle elementinden gelen mr^2 katkısını verilen bir eksen için toplamalıyız.
 - Yani eylemsizlik momenti I integralden elde edilir:

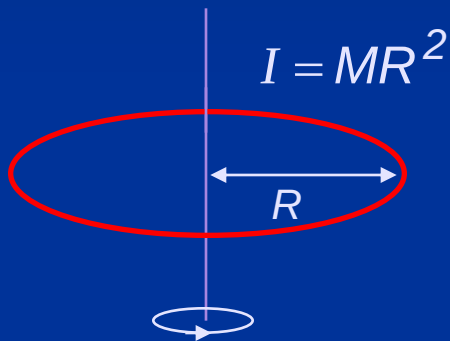
$$I = \int r^2 dm$$

$$I = \int r^2 \rho(\vec{r}) dv = \int r^2 \rho(\vec{r}) d^3r \Leftarrow 3 \text{ boyutlu}$$

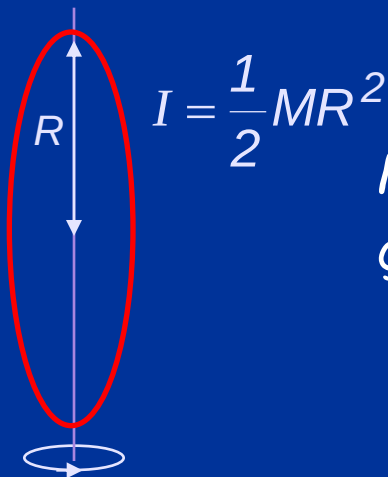


Eylemsizlik Momenti...

- Katı cisim için eylemsizlik momentine bazı örnekler:



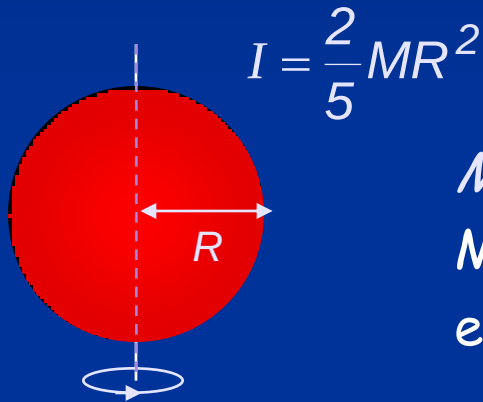
M kütleli ve R yarıçaplı bir çember için merkezinden geçen ve silindir düzlemine dik eksene göre eylemsizlik momenti



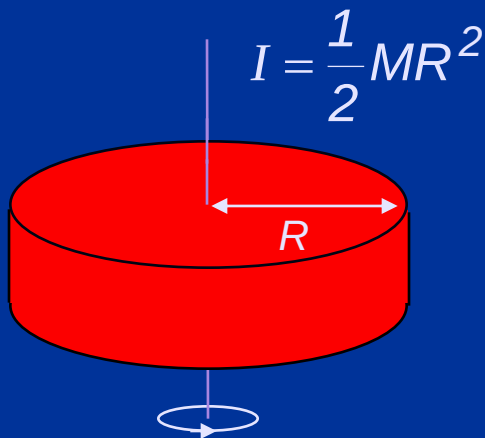
M kütleli ve R yarıçaplı bir çember için, çaptan geçen eksene göre eylemsizlik momenti

Eylemsizlik Momenti...

- Katı cisim için eylemsizlik momentine bazı örnekler:



M kütleli ve R yarıçaplı katı küre için Merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momenti.



M kütleli ve R yarıçaplı katı disk yada silindir için merkezden geçen dik eksene göre eylemsizlik momenti.

Ders 16, Soru 2

Eylemsizlik Momenti

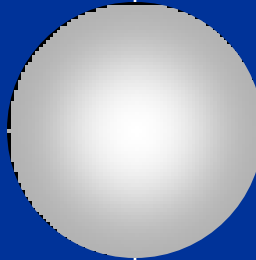
- Kütleleri ve yarıçapları aynı iki küreden biri katı alüminyumdan diğeri içi boş altın kabuğundandır.
 - Merkezden geçen eksene göre hangisinin eylemsizlik momenti daha büyüktür?

(a) Katı alüminyum

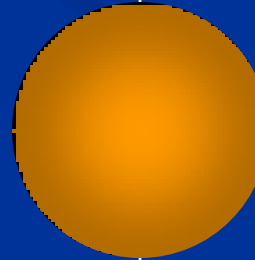
(b) oyuk altın

(c) aynı

katı



oyuk

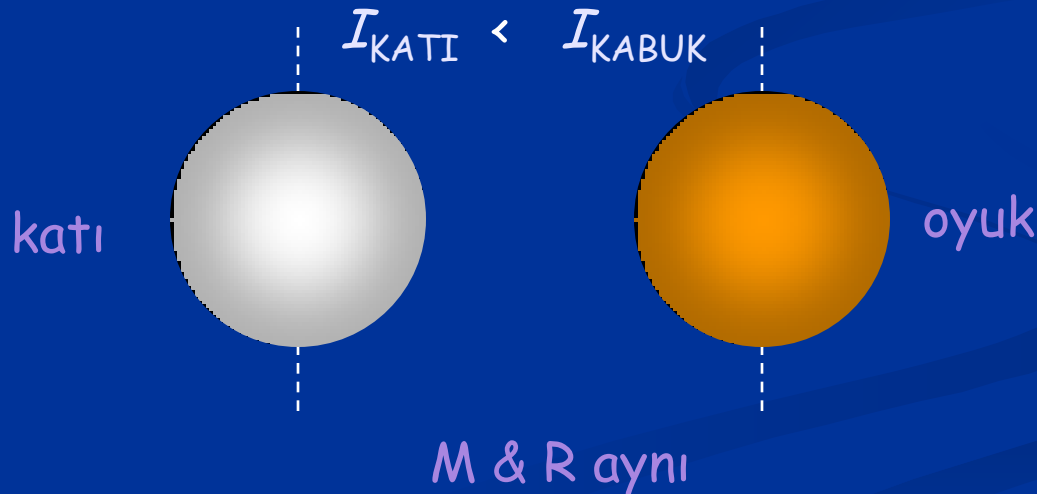


M & R aynı

Ders 16, Soru 2

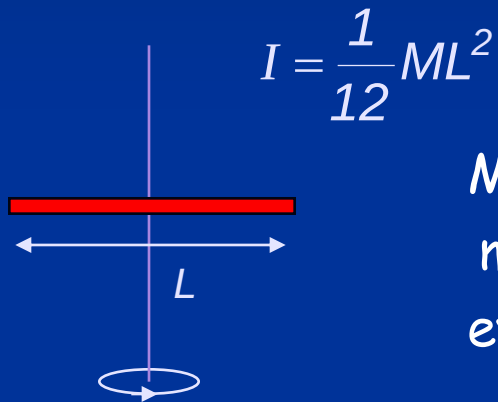
Eylemsizlik Momenti

- Eylemsizlik momenti kütle (her iki cisimde de aynı) ve dönme ekseninden olan uzaklığın karesine bağlıdır. Oyuk kürede mesafe daha büyüktür, çünkü kütlesi daha dışarıdadır.
 - Küresel kabuk (altın) daha büyük eylemsizlik momentine sahiptir.

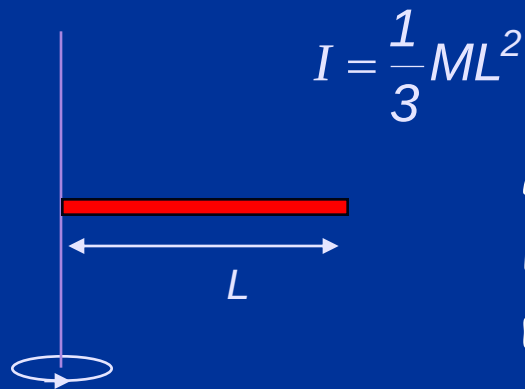


Eylemsizlik Momenti...

- Katı cisimler için I ya bazı örnekler :



M kütleli ve L uzunluklu bir çubuk için merkezinden geçen dik eksene göre eylemsizlik momenti.



M kütleli ve L uzunluklu bir çubuk için bir köşesinden geçen eksene göre eylemsizlik momenti.

Paralel Eksen Teoremi

- M kütleli bir katı cismin kütle merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momentini I_{KM} , bildiğimizi farz edelim.
- KM'inden geçen eksene paralel ve ona D uzaklığında başka bir eksene göre eylemsizlik momenti:

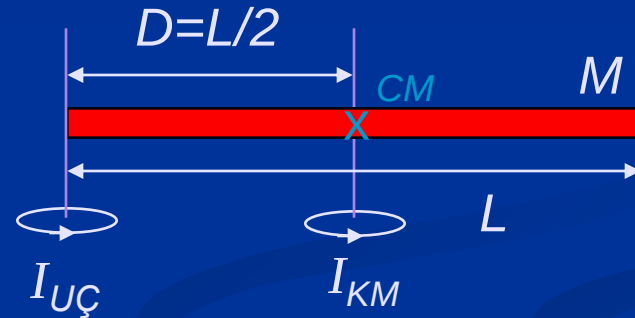
$$I_{PARALEL} = I_{KM} + MD^2$$

- Eğer I_{KM} biliyorsak KMzinden geçen eksene paralel eksene göre eylemsizlik momentini hesaplamak kolaydır.

Paralel Eksen Teoremi:Örnek

- Kütle M ve uzunluğu D olan düzgün bir çubuk dikkate alalım. Çubuğun en ucuna göre eylemsizlik momentini bulun.

$$I_{PARALEL} = I_{KM} + MD^2$$



Enerji Korunumuna Dair

- Sistemin toplam kinetik enerjisi lab gözlem çerçevesine göre:

$$E_{LAB} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad \text{ama}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{V}_{KM} + \mathbf{V}_1^* \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{V}_{KM} + \mathbf{V}_2^* \end{aligned}$$

$$\text{yani} \quad v_1^2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = V_{KM}^2 + V_1^{*2} + 2\mathbf{V}_{KM} \cdot \mathbf{V}_1^*$$

(v_2 için aynısı söz konusu)

$$\begin{aligned} E_{LAB} &= \underbrace{\frac{1}{2}m_1v_1^{*2} + \frac{1}{2}m_2v_2^{*2}}_{= K_{REL}} + \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_{KM}^2}_{= K_{KM}} + \underbrace{\mathbf{V}_{KM} \cdot (m_1\mathbf{v}_1^* + m_2\mathbf{v}_2^*)}_{= P_{NET,KM} = 0} \end{aligned}$$

KM hareketi ile bağlantı

- Önceki slaytte parçacıklar sistemi için bulduğumuz kinetik enerji terimi :

$$K_{\text{NET}} = \underbrace{\sum \frac{1}{2} m_i u_i^2}_{K_{\text{REL}}} + \underbrace{\frac{1}{2} M V_{\text{KM}}^2}_{K_{\text{KM}}}$$

- KM etrafında dönen katı cisim için birinci terim:

$$K_{\text{REL}} = \sum \frac{1}{2} m_i u_i^2 \quad \text{Yerine koyarak } u_i = \omega r_i$$

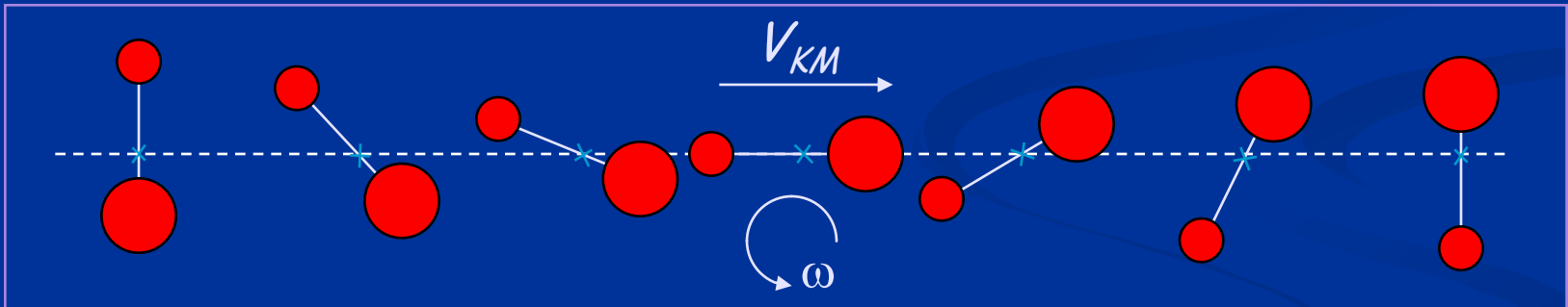
$$K_{\text{REL}} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2 \quad \rightarrow \quad \sum m_i r_i^2 = I_{\text{KM}}$$

$$K_{\text{TOP}} = \frac{1}{2} I_{\text{KM}} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{\text{KM}}^2$$

KM hareketi ile bağlantı...

- Kütle merkezi etrafında dönen katı bir cisim için KM hareket halinde ise:

$$K_{\text{NET}} = \frac{1}{2} I_{\text{KM}} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{\text{KM}}^2$$



Önümüzdeki derste daha sı var...

Özet

- Dönme kinematiği
 - Bir boyutlu kinematik ile benzeşim
- Dönen sistemin kinetik enerjisi
 - Eylemsizlik momenti
 - Ayırık parçacıklar
 - Sürekli katı cisimler
- Paralel eksen teoremi