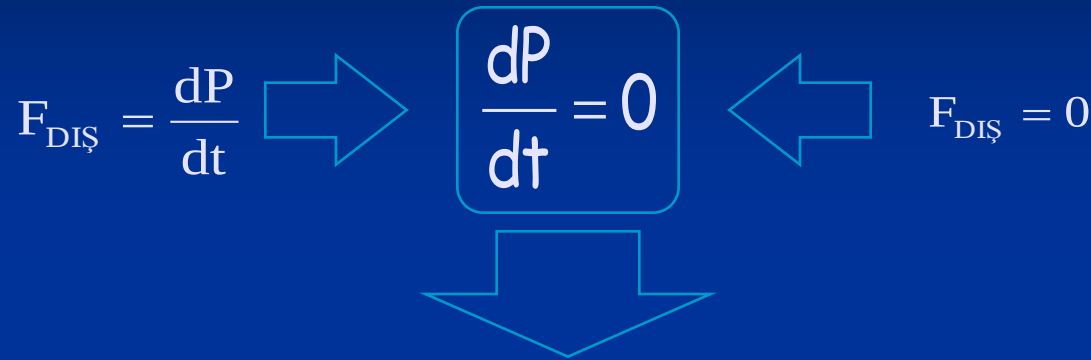


Fizik 101: Ders 14

Ajanda

- 2 Boyutta inelastik çarpışma
- Patlamalar
- 1 Boyutta elastik çarpışma
- Kütle merkezi referans gözlem çerçevesi
- Çarpışan arabalar
- Elastik çarpışmanın özellikleri

Momentumun Korunumu

$$F_{\text{DİŞ}} = \frac{dP}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dP}{dt} = 0} \Leftarrow F_{\text{DİŞ}} = 0$$


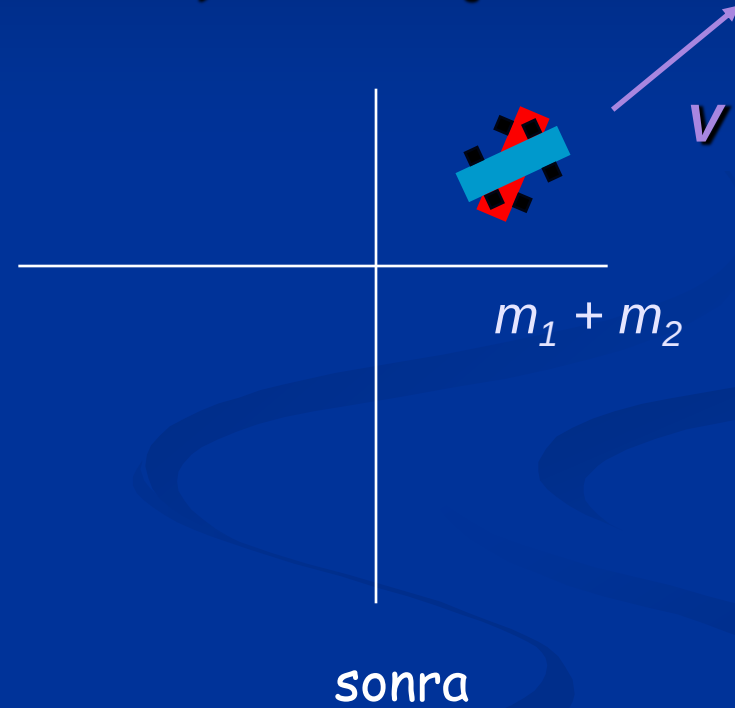
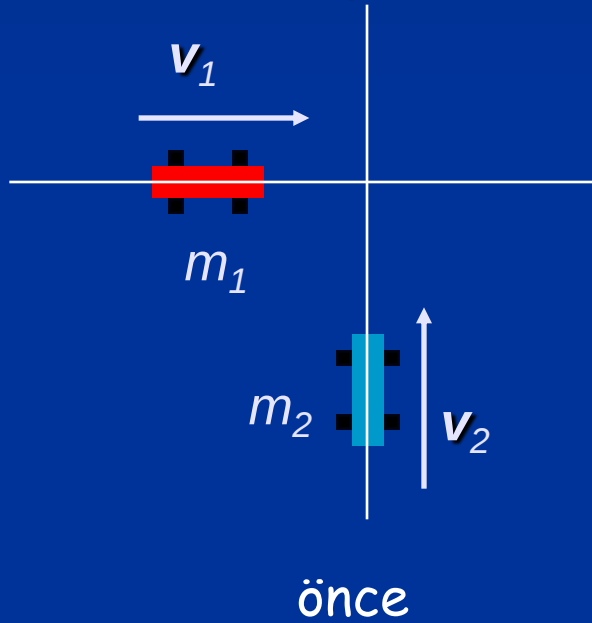
- Momentumun Korunumu fiziğin en temel kavramlarından biridir.
- Momentum vektörel büyüklük ve korunumu vektör denklemdir.
 - Dış kuvvetin olmadığı herhangi bir yön için kullanabiliriz.
- Enerjinin korunumlu olmadığı durumlarda dahi momentumun korunumlu olduğunu göreceğiz.

Enerjinin Korunumuna İlişkin...

- İnelastik bir çarpışmada toplam kinetik enerjinin korunmadığını gördük.
 - Enerji kaybı:
 - Isı (bomba)
 - Metalin bükülmesi (arabaların çarpışması)
- Kinetik enerji **korunmaz** zira çarpışma esnasında **iş** yapılmıştır!
- Belirli yönde eğer dış bir kuvvet etki etmiyorsa momentum korunur!
 - Genelde, momentumun korunumu enerjinin korunumundan daha kolay sağlanır.

2 Boyutta Inelastik Çarpışma

- Farzî muhal kaygan (sürtünmesiz) bir kavşakta iki otomobil çarpışsın:



2 Boyutta Inelastik Çarpışma

- Etki eden başka bir dış kuvvet yok..
 - Her iki bileşen için momentumun korunumunu kullanırsak:

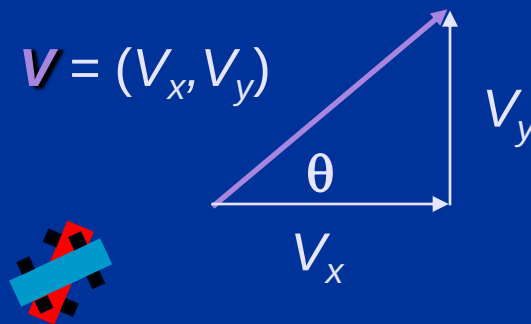
$$x: \quad P_{x,i} = P_{x,f} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V_x \Rightarrow V_x = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} v_1$$

$$y: \quad P_{y,i} = P_{y,f} \Rightarrow m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V_y \Rightarrow V_y = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} v_2$$



2 Boyutta Inelastik Çarpışma

- Çarpışmadan sonraki hareketi biliyoruz!



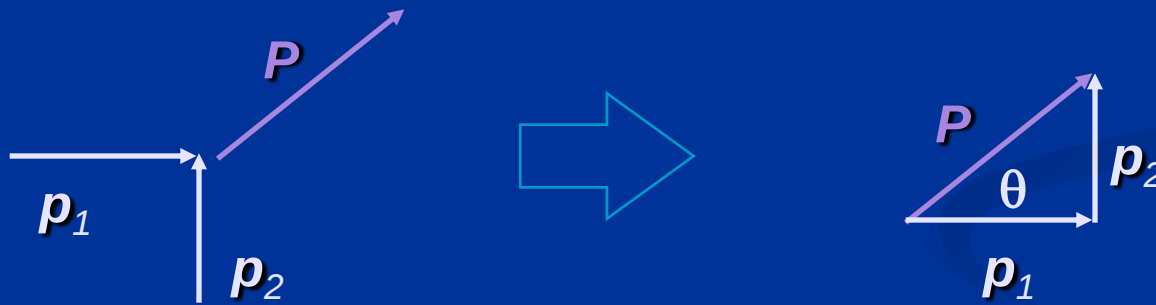
$$V_x = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} v_1$$

$$V_y = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} v_2$$

$$\tan \theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} = \frac{p_2}{p_1}$$

2 Boyutta Inelastik Çarpışma

- Vektörleri kullanarak ta aynı şeyi yapabiliriz:



$$\tan \theta = \frac{p_2}{p_1}$$

Patlama (inelastik patlama)

Patlamadan önce:



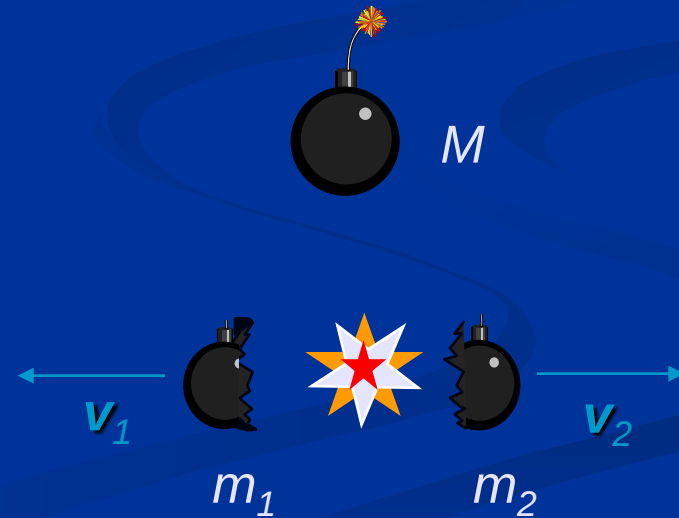
Patlamadan sonra:



Patlama

- Dış kuvvet yok, yani P korunur.
- Başlangıçta: $P = 0$
- Sonda: $P = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0$

$$m_1 \mathbf{v}_1 = -m_2 \mathbf{v}_2$$



Ders 14, Soru 1

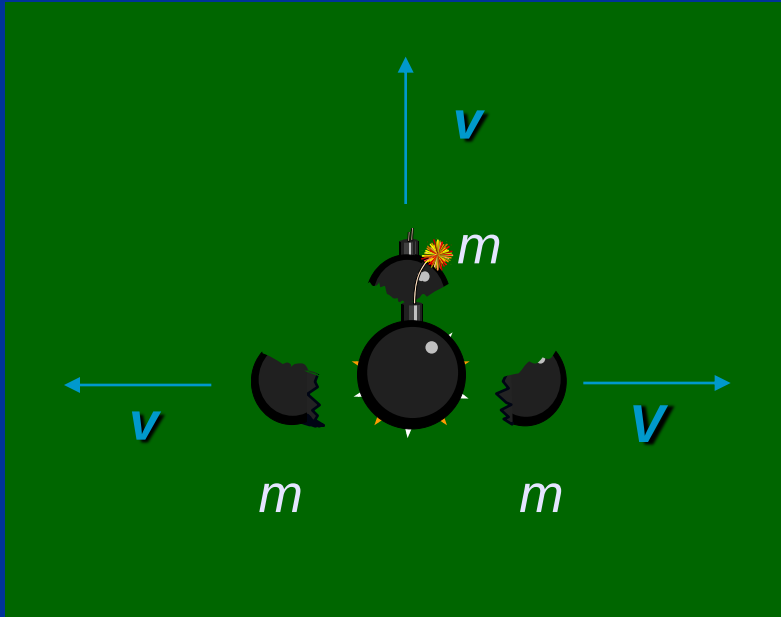
Momentumun Korunumu

- Bir bomba patlayarak 3 özdeş parçaya bölünüyor. Aşağıdaki şekillerden hangisi olası son durumu gösterir?

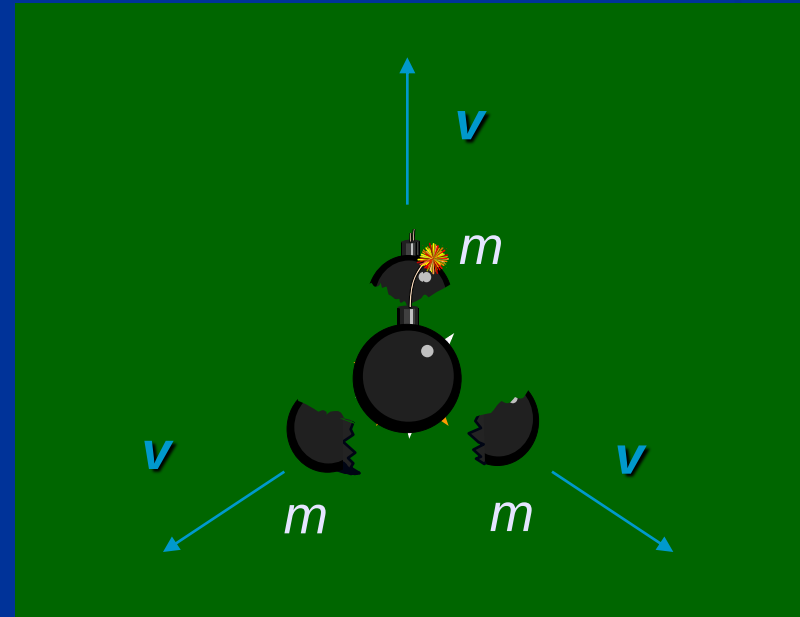
(a) 1

(b) 2

(c) ikiside



(1)

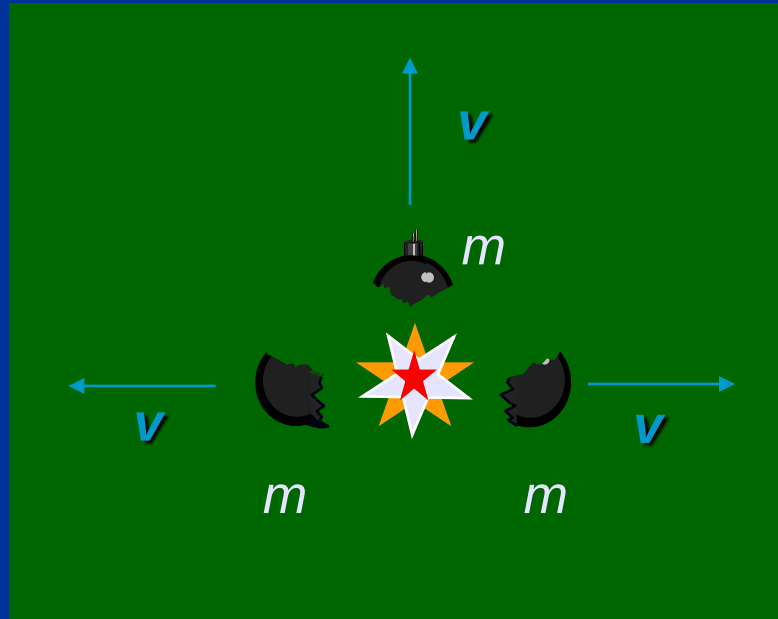


(2)

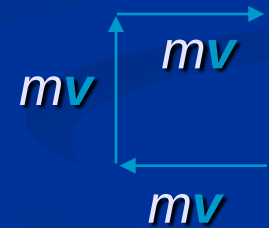
Ders 14, Soru 1

Momentumun Korunumu

- Dış kuvvet olmadığından P korunumludur.
- Başlangıçta: $P = 0$
- Resim (1) de yukarı doğru olan momentumu dengeleyecek bir şey yok. Yani: $P_{son} \neq 0$.



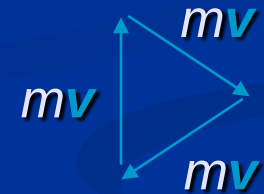
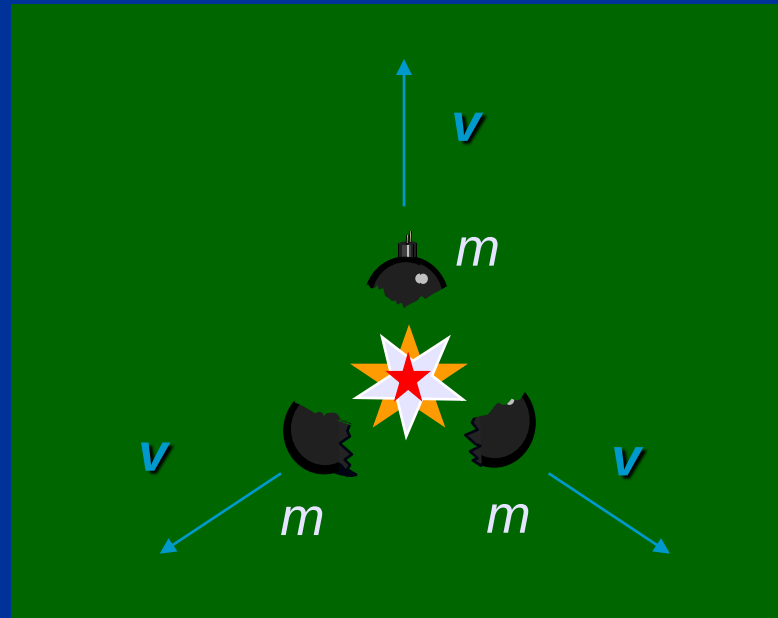
(1)



Ders 14, Soru 1

Momentumun Korunumu

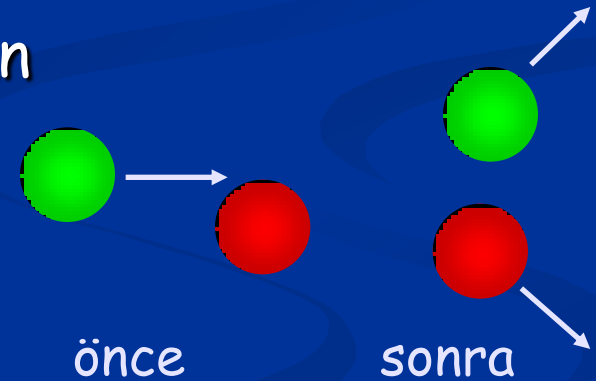
- Dış kuvvet olmadığından P korunumludur.
- Başlangıçta: $P = 0$
- Son durumda momentumların toplamı sıfırdır.
- $P_{son} = 0$.



(2)

Elastik Çarpışma

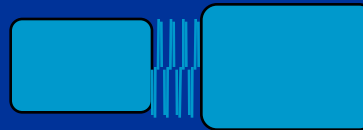
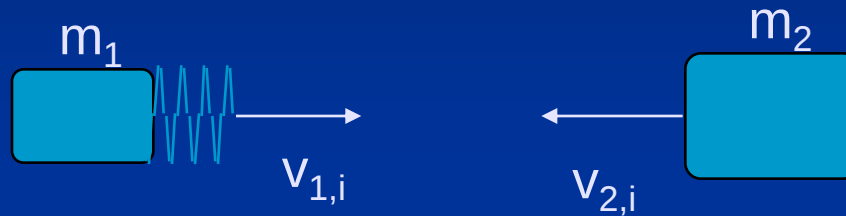
- Bir çarpışmada kinetik enerji ve momentum korunuyorsa bu çarpışmaya elastik çarpışma denir.
- Bu daha çok kısıt (constraints) getirir.
 - Dolayısıyla daha karmaşık problemleri çözebiliriz!!
 - Bilardo (2-D çarpışma)
 - Çarpışan cisimlerin çarpışmadan önce ve sonra ayrı hareketi vardır.



- 1 boyutlu basit problemlerle başlayalım

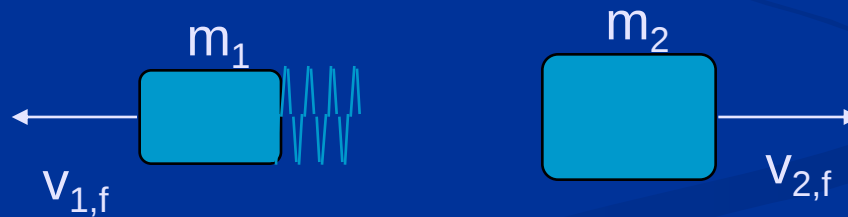
1 Boyutta Elastik Çarpışma

önce



x

sonra



1 Boyutta Elastik Çarpışma

P-korunumu P_x :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2,$$

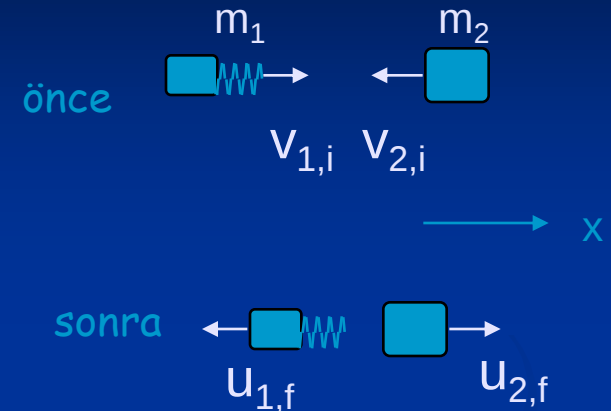
Kinetik Enerji Korunumu:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

Eğer v_1 ve v_2 biliniyorsa

U_1 ve u_2 korunum denklemlerinden elde edilir.

Çözmek zor olmamalı  2 denklem & 2 bilinmeyen!



Quiz

- m ve $3m$ kütleleri x -ekseni üzerinde aynı v_i hızı ile birbirine karşı hareket etmektedirler. m kütlesi sola, $3m$ kütlesi sağa gitmektedir. Kütleler esnek çarpışma sonucu aynı çizgi üstünde kalıyorlarsa son hızlarını hesap edin.

1 Boyutta Elastik Çarpışma

- Denklemler 2. dereceden olduğundan çözüm bazen zahmetli olabilir!!!

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2,$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

$$m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2)$$

$$m_1 (v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = m_2 (u_2 - v_2)(u_2 + v_2)$$

$$(v_1 - v_2) = -(u_1 - u_2)$$

1 Boyutta Elastik Çarpışma

■ Çözüm:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

1 Boyutta Elastik Çarpışma

- Problem kolaylaştırmanın yolu:

Kütle Merkezi Gözlem Çerçevesi

KM Referans Çerçevesi

- Sistemin toplam momentumu kütle merkezi hızı ile toplam kütlenin çarpımına eşittir:

$$P_{NET} = MV_{KM}.$$

- Sabit hızlı bir referans çerçevesini gördük (yani rölatif hareket).
- Bu durumda referans çerçevesini durgun olan KMne koyalım. Bu referansı KM referans çerçevesi olarak adlandıracacağız.
 - KM referans çerçevesinde, $V_{KM} = 0$ (tanımdan) ve dolayısıyla $P_{NET} = 0$.

Ders 14, Soru 2

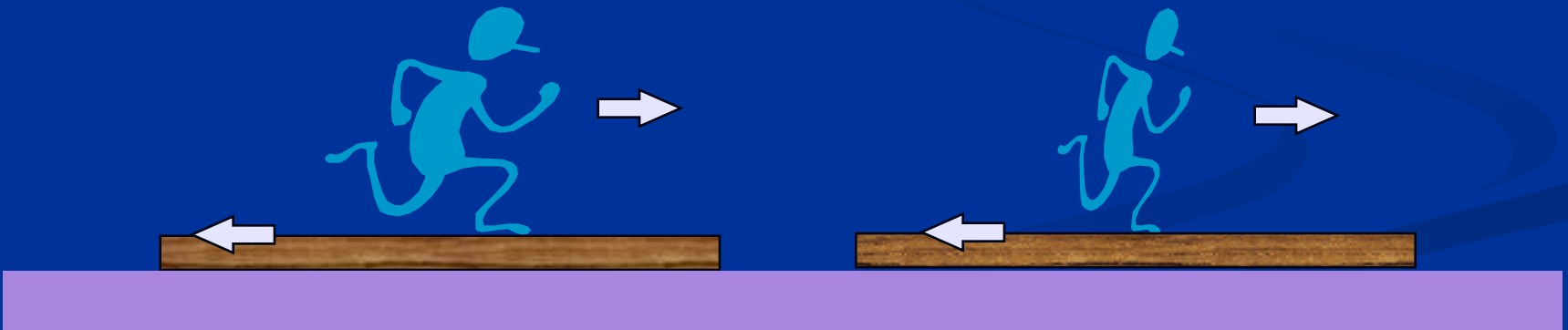
Kuvvet ve Momentum

- Biri şışman iki adam bir kış gününde donan bir gölde özdeş tahta üzerinde durmaktadırlar. Tahtalar (sürtünmesiz) buz üzerinde hareketsiz durmaktadır.
- Adamlar tahta üzerinde aynı anda aynı hızla koşmaya başlar.
 - Buza göre adamların hangisi daha hızlı hareket eder?

(a) şışman

(b) zayıf

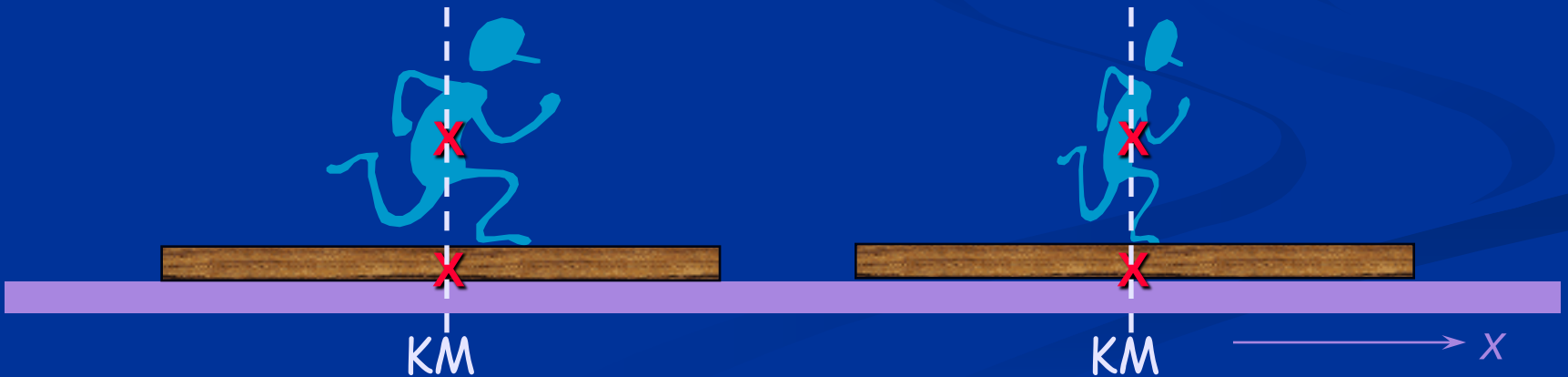
(c) aynı



Ders 14, Soru 2

Kavramsal Cevap

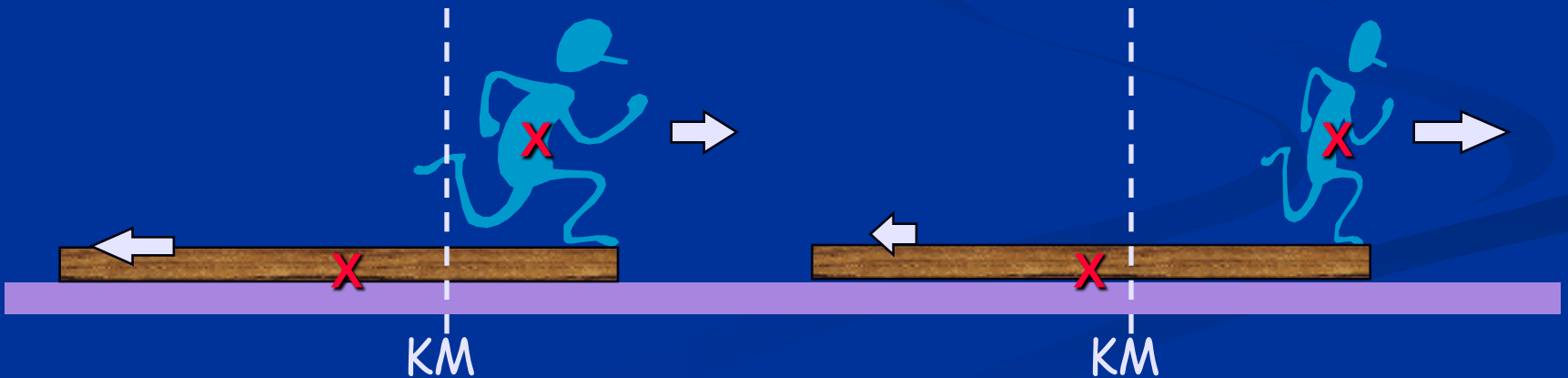
- Hareket yönünde (x) dış kuvvet 0!
 - Sistemin KM hareketsiz!



Ders 14, Soru 2

Kavramsal Cevap

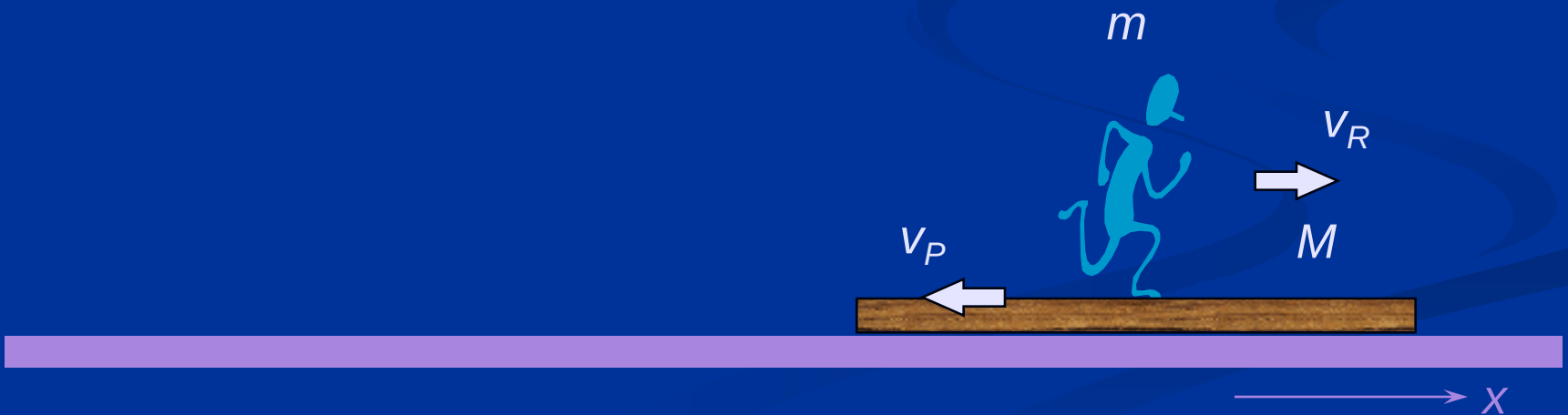
- Hareket yönünde (x) dış kuvvet 0!
 - Sistemin KM hareketsiz!
- Her iki adamda aynı zamanda tahtanın ucuna varır, ama zayıf olan adam KM'den daha uzaktadır.
- Buza göre zayıf adam daha hızlı hareket eder!



Ders 14, Soru 2

Cebirsel Çözüm

- Koşan adam ve tahta sisteminden birine dikkat edelim: X-yönünde dış kuvvet sıfırdır:
 - X-yönünde momentum korunumludur!
 - Başlangıçtaki toplam momentum sıfırdır, korunum gereği 0 kalmalıdır.
 - Koşan adamı KM referans çerçevesinde gözleyelim!
- Koşan adamın kütlesi m ve tahtaninkisi M olsun.
- Buza göre koşucunun ve tahtanın hızları v_R ve v_P olsun.



Ders 14, Soru 2

Cebirsel Çözüm

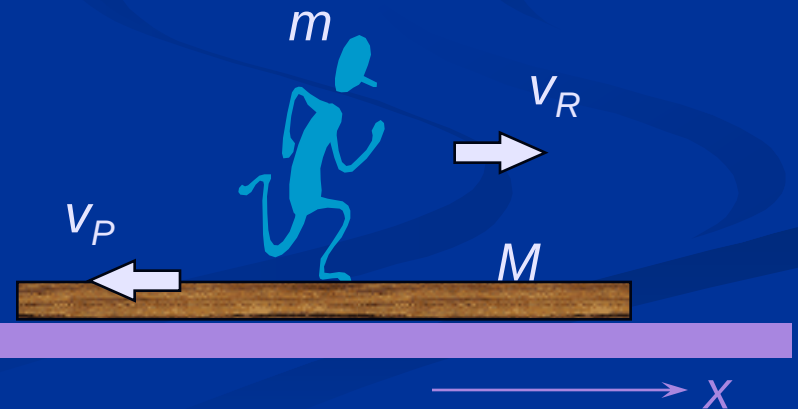
- Koşucunun tahtaya göre hızı $V = v_R + v_P$ (her iki koşan için aynı).

$$Mv_P = mv_R \quad (\text{momentumun korunumu})$$

$v_P = V - v_R$ yerine koyarsak buluruz ki:

$$v_R = V \frac{M}{m + M}$$

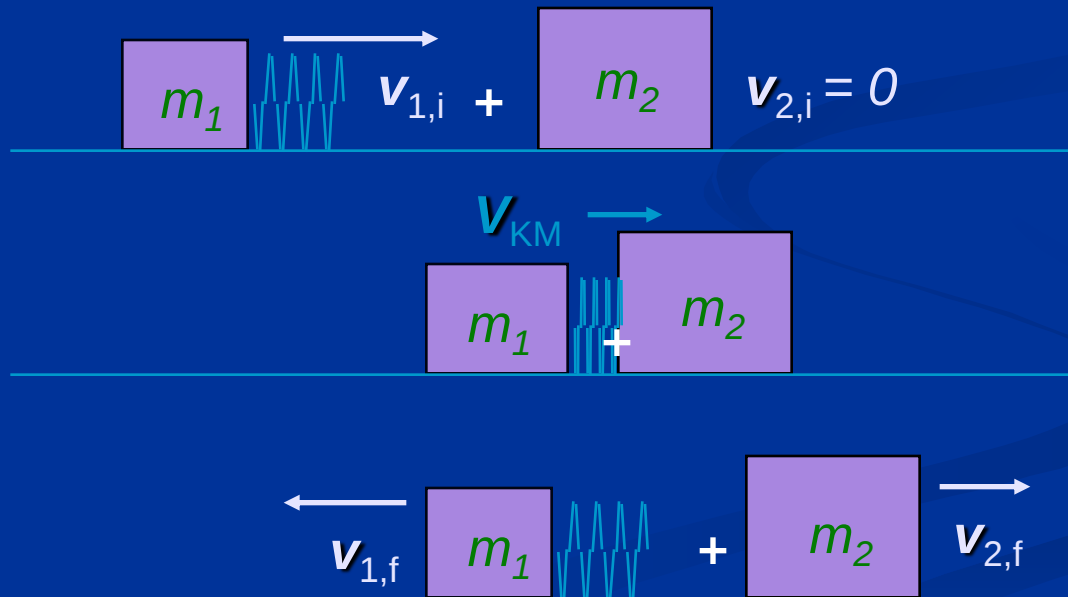
→ v_R daha büyük m daha küçük.



Örnek: KM referans gözlem çerçevesi

- Şekilde sürtünmesiz bir yüzeyde yay ve kütle sistemi verilmiştir. $m_1 = 0.2 \text{ kg}$ kütlesi $v_{1,i} = 1.5 \text{ m/s}$ hızıyla $m_2 = 0.8 \text{ kg}$ kütlesiyle çarpışır ve m_1 kütlesine bağlanan bir yay ile geri teper. Kütlelerin son hızları nedir?

+ = KM



Elastik Çarpışmada Enerji:

- İlk ve son hızları kullanarak enerji korunumunu kullanalım.
- Kütle merkezi KM referans çerçevesinde çarpışmadan önce ve sonra hız aynı:

$$\frac{1}{2m_1}m_1^2v_{1,i}^{*2} + \frac{1}{2m_2}m_2^2v_{2,i}^{*2} = \frac{1}{2m_1}m_1^2v_{1,f}^{*2} + \frac{1}{2m_2}m_2^2v_{2,f}^{*2}$$

- Toplam momentum sıfırdır:

$$\Rightarrow (m_1v_{1,i}^*)^2 = (m_2v_{2,i}^*)^2$$

- Dolayısıyla:

$$\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)m_1^2v_{1,i}^{*2} = \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)m_1^2v_{1,f}^{*2}$$



$$v_{1,i}^{*2} = v_{1,f}^{*2}$$

(parçacık 2 için aynısı)

Dolayısı ile, 1 boyutta:

$$v_{1,f}^* = -v_{1,i}^*$$

$$v_{2,f}^* = -v_{2,i}^*$$

Örnek...

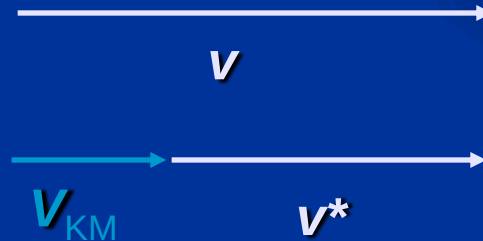
- Dört adımlı prosedür:
 - 1. adım: Kütle merkezini hızını bulmak, V_{KM} .

Örnek...

- “lab” referans çerçevesine göre kütle merkezi hızı V_{KM} , parçacığın hızı v olsun. Parçacığın KMzine göre hızı v^* :

$$v^* = v - V_{KM}$$

(burada v^* , v , V_{KM} vektördür)



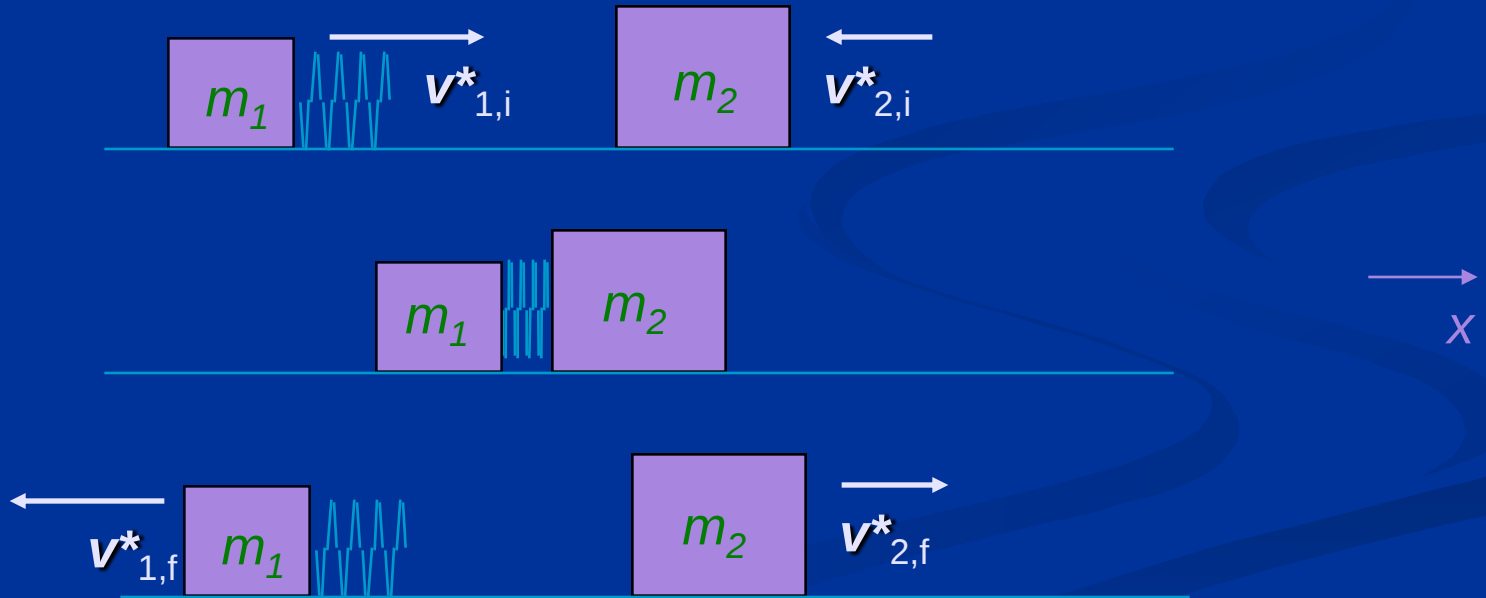
Örnek...

- 2. adım

- KMne göre ilk hızların hesabı:
(bütün hızlar x yönünde):

Örnek...

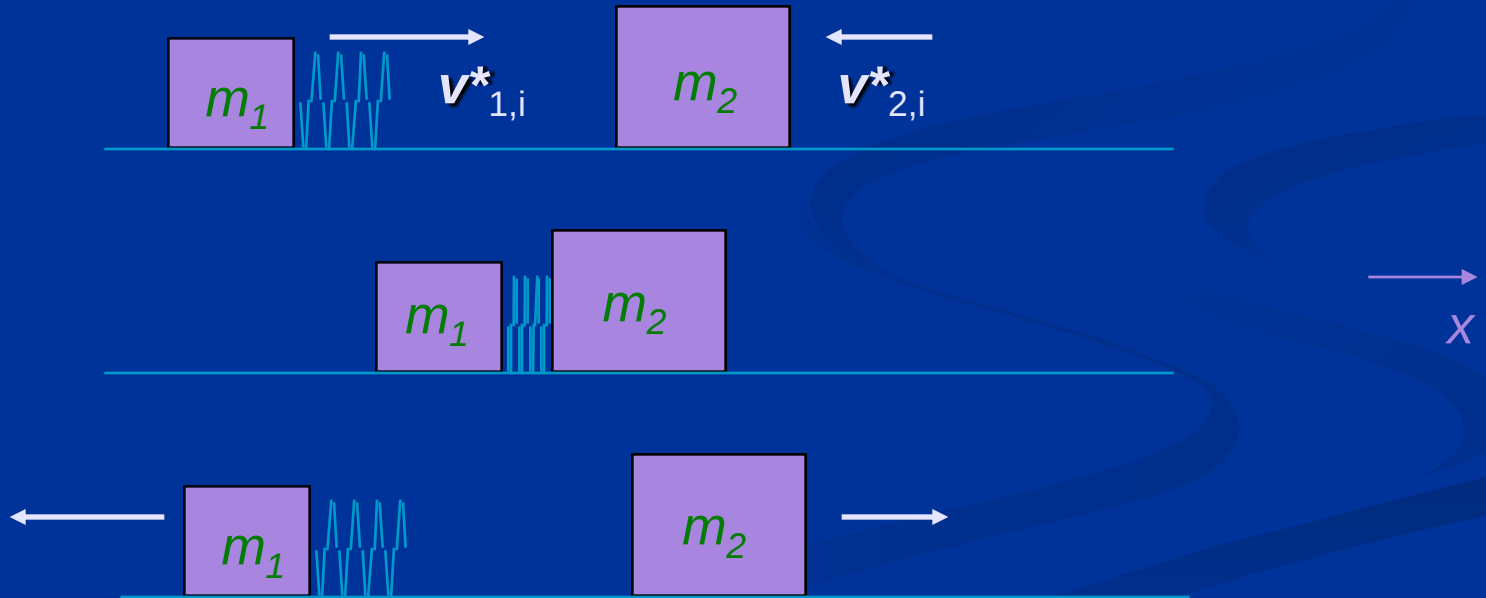
- Şimdide çarpışmaya v_{KM} hızıyla hareket eden kütle merkezinden bakarsak.



Örnek...

$$v_{1,f}^* = -v_{1,i}^*$$

$$v_{2,f}^* = -v_{2,i}^*$$



$$v^* = v - V_{KM}$$

Örnek...

- Lab referansında son hızları hesaplayabiliriz:

$$v = v^* + V_{CM}$$

4 basamaklı çözüm! 2. dereceden denklemleri elimine etmiş olduk!!

Özet: KM referans çerçevesi kullanma klavuzu

Adım 1 : KM hızının tespiti $\mathbf{v}_{KM} = \left(\frac{(m_1 \mathbf{v}_{1,i} + m_2 \mathbf{v}_{2,i})}{m_1 + m_2} \right)$

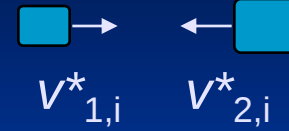
Adım 2 : KMne göre başlangıç hızlarının hesabı $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{KM}$

Adım 3 : KMne göre son hızların hızların hesabı $\mathbf{v}_f^* = -\mathbf{v}_i^*$

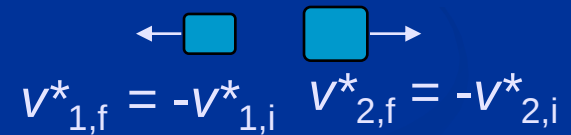
Adım 4 : Son hızların lab gözlem çerçevesinde hesabı $\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}_{KM}$

İlginç Sonuçlar

- KMzine göre bir cismin hızı çarpışmadan önce ve sonra aynıdır, sadece yön değişir.



- Dolayısıyla blokların rölatif hızları çarpışmadan önce ve sonra eşit ama ters yöndedir.



$$(V_{1,i}^* - V_{2,i}^*) = - (V_{1,f}^* - V_{2,f}^*)$$

- Ama hızların farkının ölçülmesi referans çerçevesinden bağımsız olduğundan diyebiliriz ki:
blokların rölatif hızları gözlem çerçevesinden bağımsız olarak çarpışmadan önce ve sonra aynıdır.

Enerji Korunumuna Dair

- Sistemin toplam kinetik enerjisi lab gözlem çerçevesine göre:

$$E_{LAB} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad \text{ama}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= V_{KM} + V_1^* \\ v_2 &= V_{KM} + V_2^* \end{aligned}$$

$$\text{yani} \quad v_1^2 = v_1 \cdot v_1 = V_{KM}^2 + V_1^{*2} + 2V_{KM} \cdot V_1^*$$

(v_2 için aynısı söz konusu)

$$\begin{aligned} E_{LAB} &= \underbrace{\frac{1}{2}m_1v_1^{*2} + \frac{1}{2}m_2v_2^{*2}}_{= K_{REL}} + \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_{KM}^2}_{= K_{KM}} + \underbrace{V_{KM} \cdot (m_1v_1^* + m_2v_2^*)}_{= P_{NET,KM} = 0} \end{aligned}$$

Enerji Korunumuna Dair

- Sistemin toplam kinetik enerjisi lab gözlem çerçevesine göre:

$$E_{LAB} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2}}_{= K_{REL}} + \underbrace{\frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{KM}^2}_{= K_{KM}}$$

$$\rightarrow E_{LAB} = K_{REL} + K_{KM}$$

K_{KM} kütle merkezinin kinetik enerjisi.

K_{REL} rölatif hareketten dolayı KMdeki KE.

Enerji Korunumuna Dair

$$E_{LAB} = K_{REL} + K_{KM}$$

- Enerji gözlem çerçevesine bağlı mı??

K_{REL} referans çerçevesinden bağımsız, ama K_{KM} referans çerçevesine bağlı (ve KM referans çerçevesinde = 0).

Özet

- 2 Boyutta inelastik çarpışma
- Patlamalar
- 1 Boyutta elastik çarpışma
- Kütle merkezi referans gözlem çerçevesi
- Çarpışan arabalar
- Elastik çarpışmanın özellikleri