

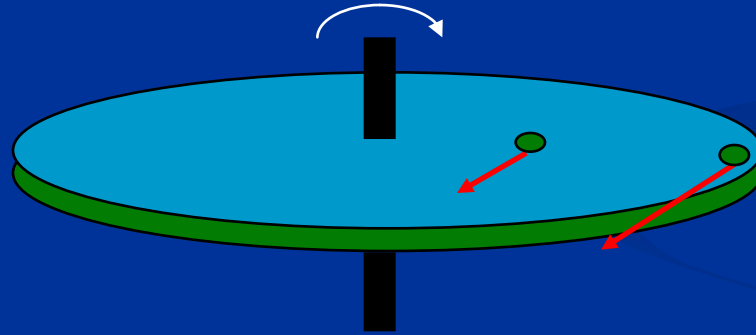
Fizik 101: Ders 13

Ajanda

- Çok parçacıklı sistem
- Kütle Merkezi
- Lineer Momentum
- Örnekler
- Momentumun Korunumu
- 1 Boyutlu İnelastik Çarpışma
- Balistik Sarkaç

Çok Parçacıklı Sistem

- Şimdiye kadar basit sistemlerin (1 veya 2 parçacıklı) hareketleri ile ilgilendik.
- Gerçekçi sistemler çok daha ilginçtir!
- Örneğin dönen bir disk **yada biyolojik bir molekül.**

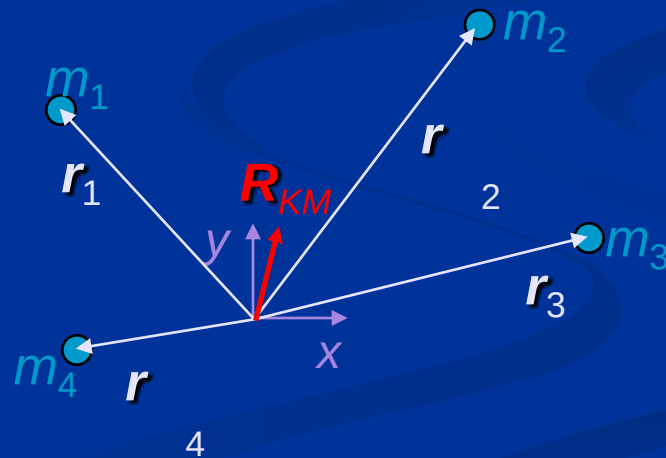


- Dönen disk, küçük parçacıkların bir toplamı olarak düşünülebilir. Her bir küçük parçacığın hareketi konumuna bağlı olacaktır.

Çok Parçacıklı Sistem: Kütle Merkezi

- Çoklu parçacıklardan oluşan bir sistem için hangi konumu sistemin pozisyonu olarak seçebiliriz?
- Kütle Merkezi (ortalama pozisyon) :
 - *Kütlesini ve konumlarını bildiğimiz noktasal N parçacıklı bir sistem için :*

$$\mathbf{R}_{KM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

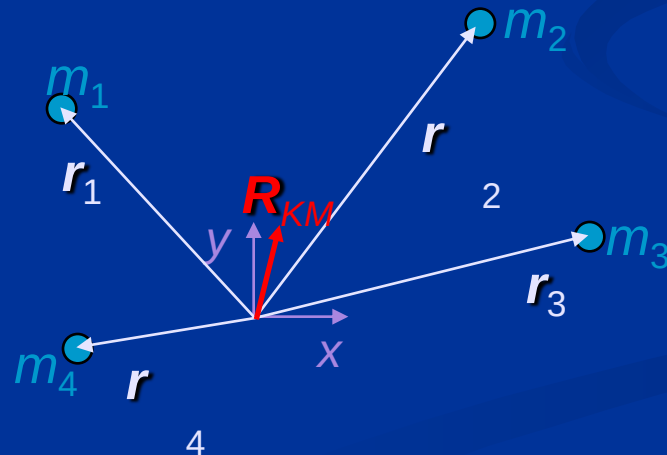


(Burada $N = 4$)

Çok Parçalıklı Sistem: Kütle Merkezi

- 3 boyutta R_{KM} bileşenleri:

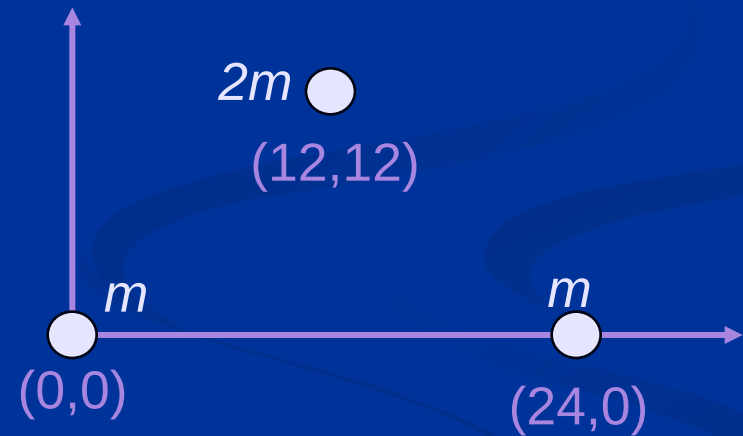
$$(X_{KM}, Y_{KM}, Z_{KM}) = \left(\frac{\sum_i m_i x_i}{M}, \frac{\sum_i m_i y_i}{M}, \frac{\sum_i m_i z_i}{M} \right)$$



(bu örnekte $N = 4$)

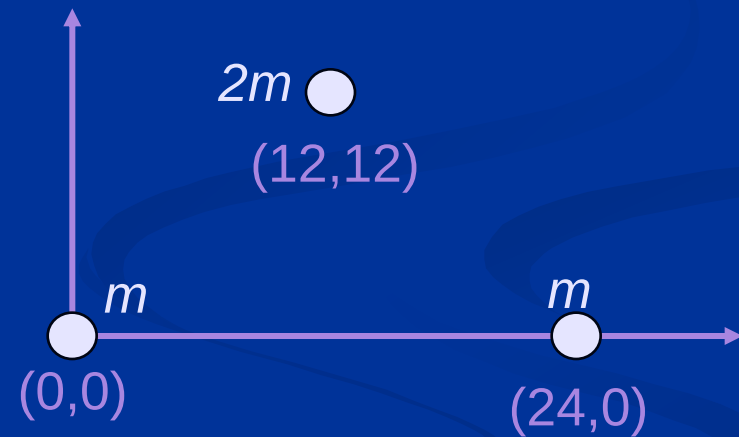
Örnek:

- Kütle dağılımımız şekildeki gibi olsun:
- $KM = ?$



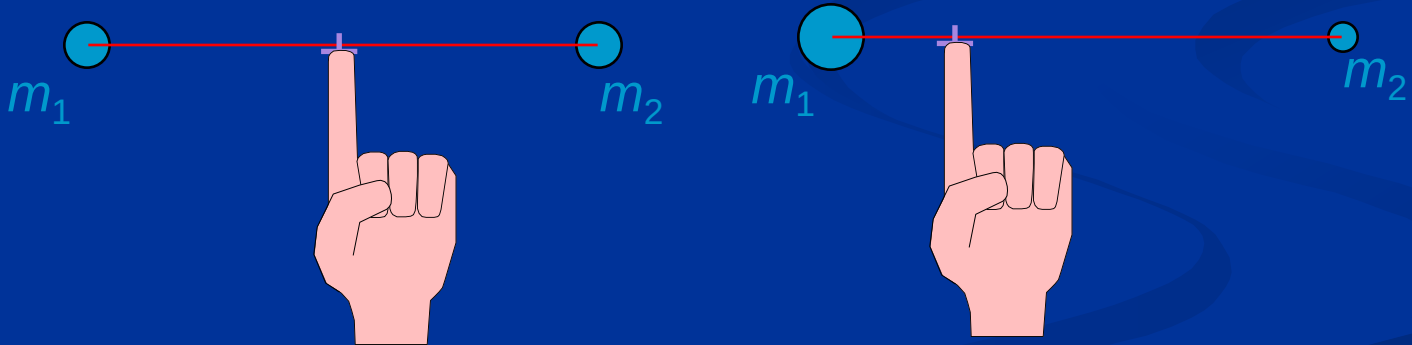
Örnek:

- Kütle dağılımımız şekildeki gibi olsun:



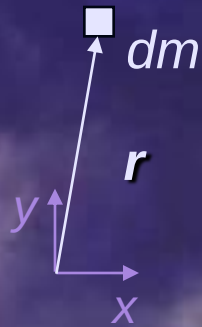
Çok Parçalıklı Sistem: Kütle Merkezi

- Kütle merkezi sistemin dengede bulunduğu konumdur!
 - Denge konumunu bulursak kütle merkezini de bulmuş oluruz.



Çok Parçacıklı Sistem: Kütle Merkezi

- Elimizde sürekli bir katı madde varsa kütle merkezi



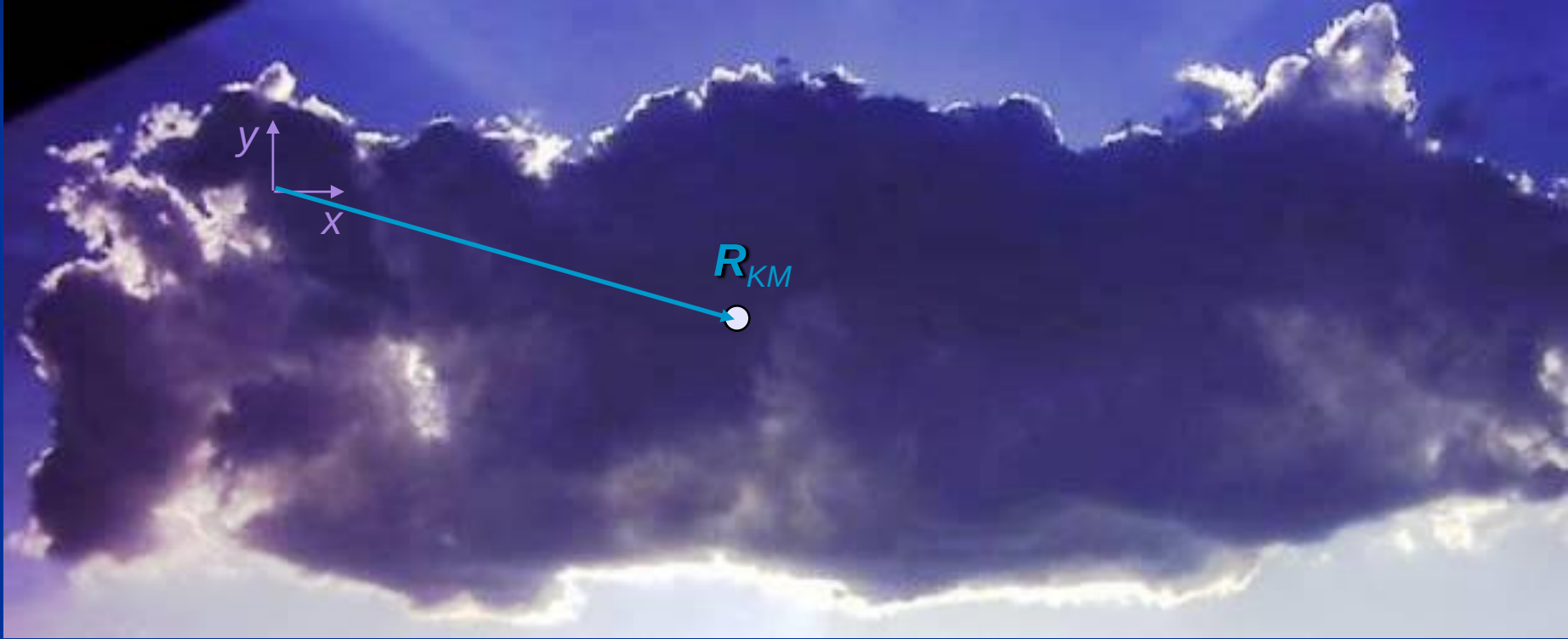
$$\mathbf{R}_{KM} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{M}$$

burada dm sonsuz küçük kütle elementidir.
Daha açık ifadesi:

$$\mathbf{R}_{KM} = \frac{\iiint_V \mathbf{r}(x, y, z) \rho(x, y, z) \, dx dy dz}{\iiint_V \rho(x, y, z) \, dx dy dz}$$

Çok Parçacıklı Sistem: Kütle Merkezi

- Kütle merkezi cismin merkezindedir.

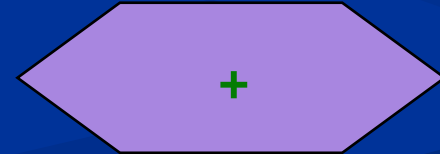
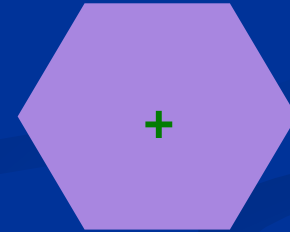
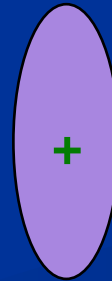
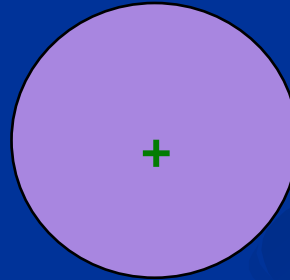
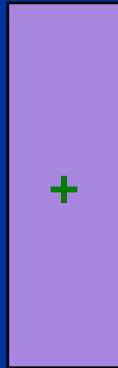
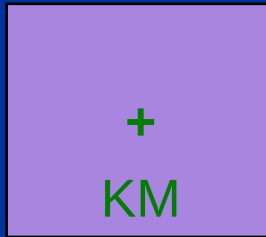


KM cismin kendine özgü bir özelliğidir.

KM hesabı orijin yada sistemi seçiminden bağımsızdır.

Çok Parçalıklı Sistem: Kütle Merkezi

- Yoğunluğu düzgün olan simetrik cisimlerin KMni bulmak için sezgilerimizi kullanabiliriz:
- Cismin geometrik merkeziyle aynıdır!



Ders 13, Soru 1

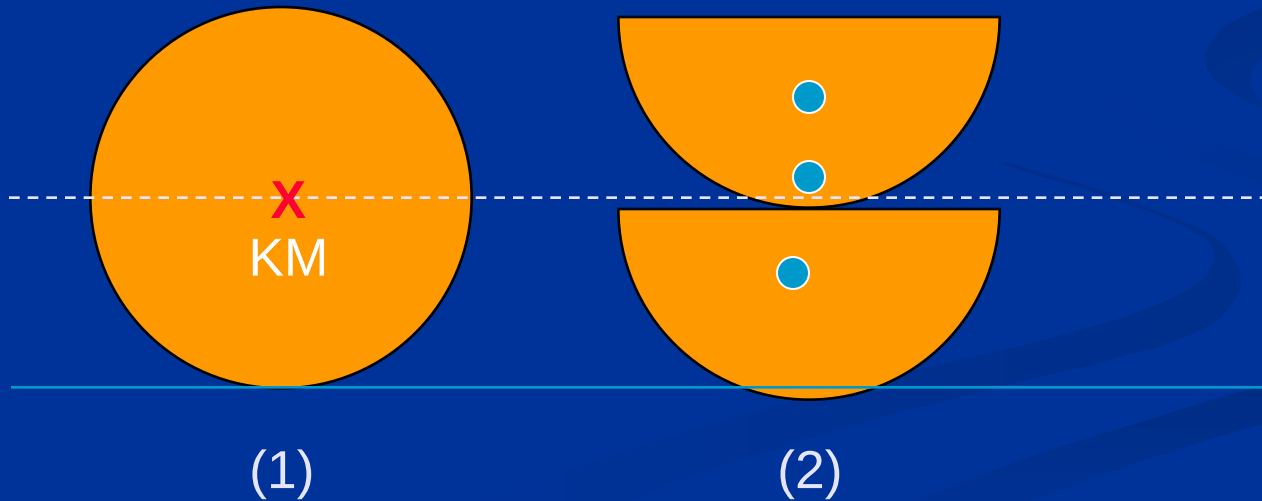
Kütle Merkezi

- (1)deki diskin KM diskin merkezi ile aynıdır.
- Farzı muhal disk ortadan ikiye kesilsin ve (2)deki şekil oluşturulsun.
 - (2) için KM (1) ile karşılaştırıldığında nerededir?

(a) yukarısında

(b) aşağısı

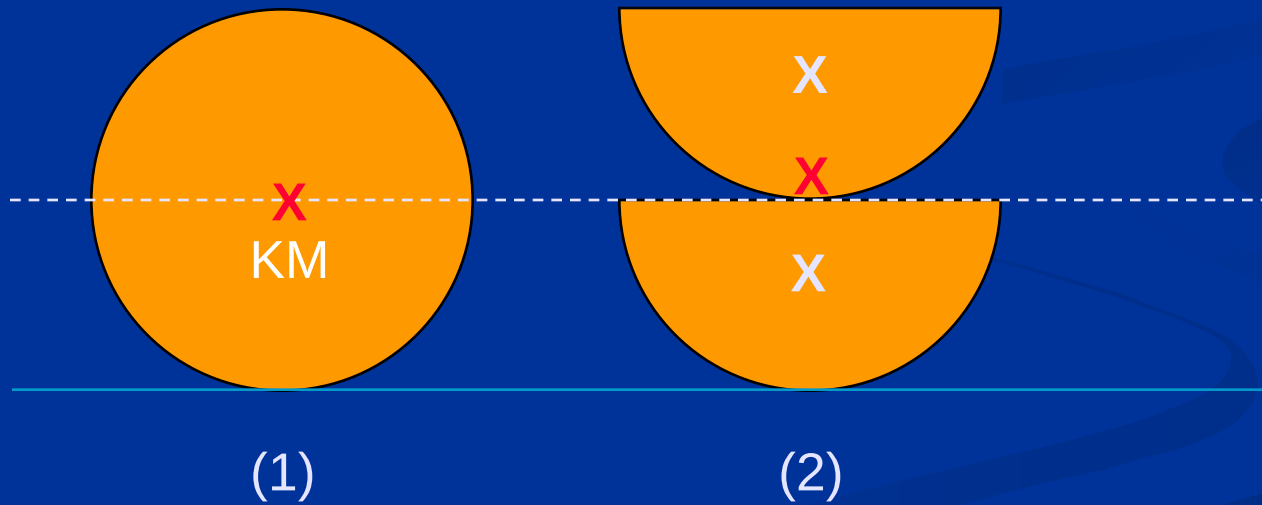
(c) aynı



Ders 13, Soru 1

Kütle Merkezi

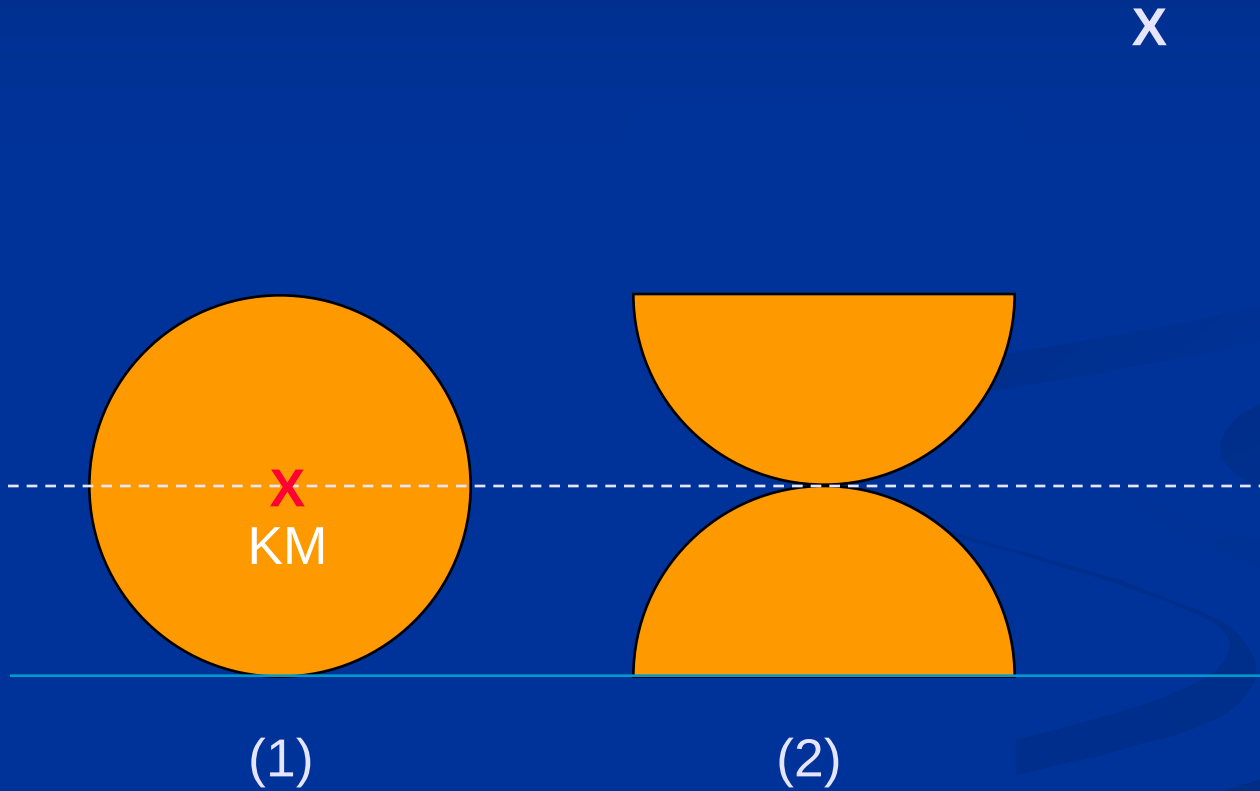
■ Neden?



Ders 13, Soru 1

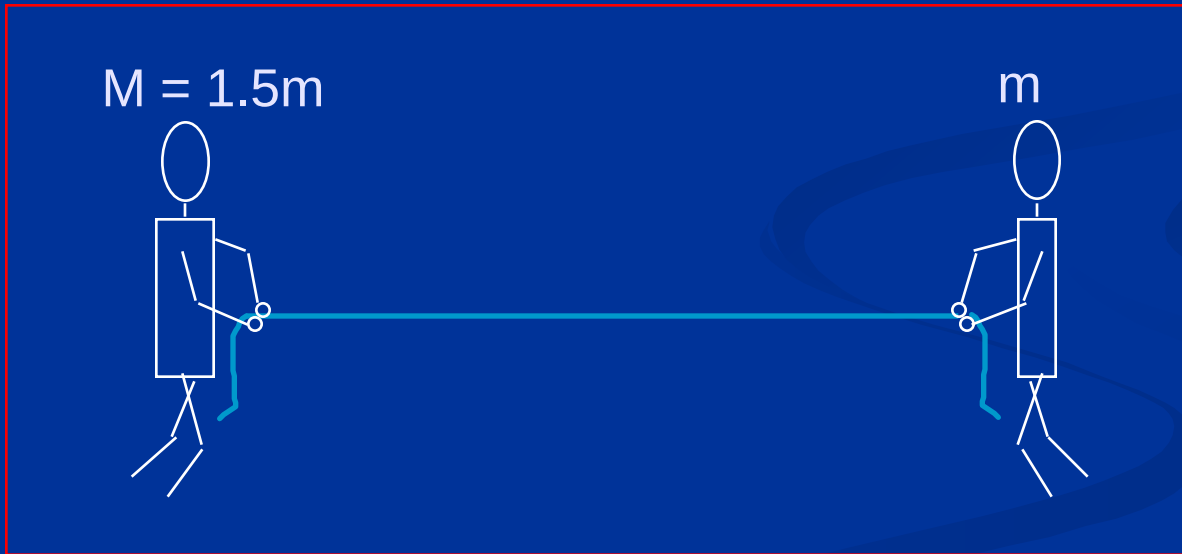
Kütle Merkezi

- Şimdi KM nerededir? Neden?



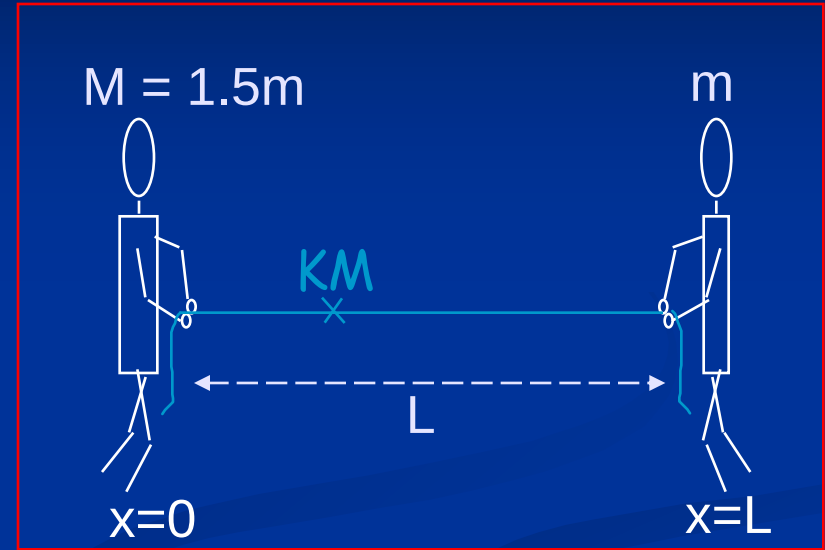
Örnek: Astronot

- Uzay yürüyüşündeki 2 astronot birbirlerine bir sicimle bağlı ve durgundurlar. Birbirlerine doğru sicimi çekerek nerede buluşurlar?



Örnek: Astronot

- Başlangıçta 2side durgun, yani $V_{KM} = 0$.
- *Dıştan bir kuvvet olmadığından* V_{KM} değişmeyecektir, yani 0.
- Hülasa KM hareketsizdir!
- Astronotlar KMnde buluşur.



KM nerde:

Soldaki astronotun pozisyonunu $x = 0$ ise:

$$x_{km} = \frac{M(0) + m(L)}{M + m} = \frac{m(L)}{2.5m} = \frac{2}{5}L$$

Lineer Momentum:

- **Tanım:** Tek parçacık için, momentum p :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

(v vektör olduğundan p vektördür!).

Yani $p_x = mv_x$ vs.

- **Newtonun 2. Yasası:**

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$= m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad \longrightarrow$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

- Lineer momentum birimi $kg \ m/s$.

Linear Momentum:

- Sistemin toplam momentumu sistemin toplam kütlesi ile sistemin KM hızının çarpımıdır!

$$P = M V_{KM}$$

- Kuvvet: $\frac{dP}{dt} = M \frac{dV_{KM}}{dt} = M A_{KM} = \sum_i m_i a_i = \sum_i F_{i,net}$

- Bizim ilgimiz $\frac{dP}{dt}$ olduğundan toplam kuvveti bulmalıyız. $\sum_i F_{i,net}$

Linear Momentum:

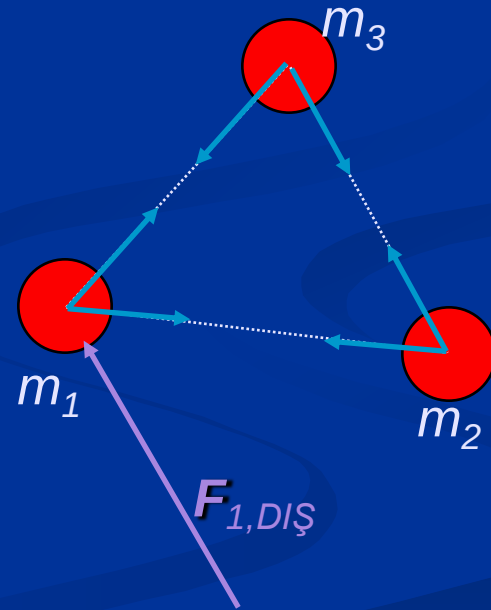
- Sadece etki eden dış kuvvetler önemlidir!

$$\frac{dP}{dt} = \sum_i F_{i,DİŞ} = F_{NET,DİŞ}$$

Bu aynı zamanda:

$$F_{NET,DİŞ} = \frac{dP}{dt} = MA_{KM}$$

Newton'un 2. yasası sisteme uygulandı



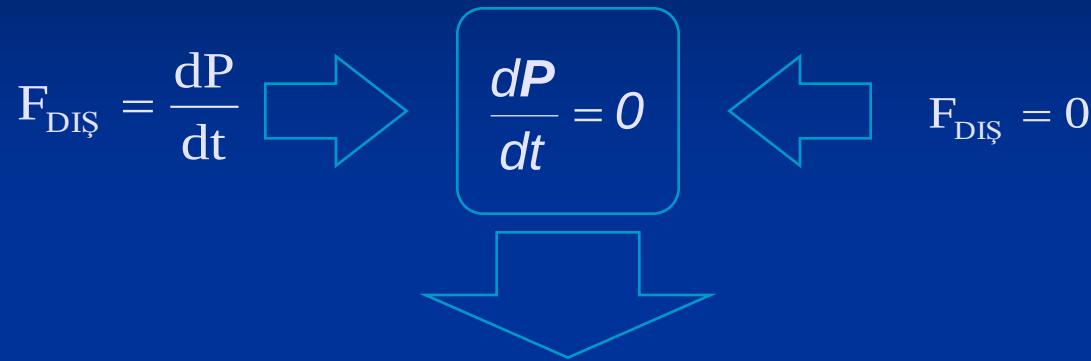
KM Hareketi

- KM hareketi için elimizdeki denklem:

$$F_{DIŞ} = \frac{dP}{dt} = MA_{KM}$$

- Bunun birden çok anlamı vardır:
- Dış kuvvetin etkisindeki dağınık bir cismin KM bir nokta gibi davranır:
 - Bunu kullanarak F ve A arasındaki bağıntıyı kullanabiliriz.
- Eğer dış kuvvet $F_{DIŞ} = 0$ ise, sistemin toplam momentumu değişmez.
 - Dış kuvvet yoksa sistemin momentumu korunur.

Momentumun Korunumu

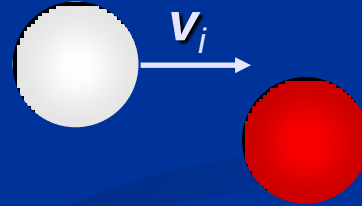
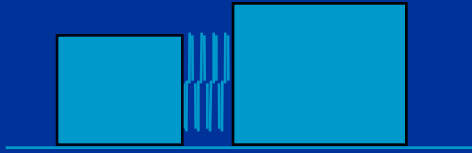
$$F_{\text{DIŞ}} = \frac{dP}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dP}{dt} = 0} \Leftarrow F_{\text{DIŞ}} = 0$$


- **Momentumun Korunumu** fiziğin en temel kavramlarından biridir.
- Momentum vektörel büyüklük ve korunumu vektör denklemdir.
 - Dış kuvvetin olmadığı herhangi bir yön için kullanabiliriz.
- **Enerjinin korunumlu olmadığı durumlarda dahi momentumun korunumlu olduğunu göreceğiz.**

Elastik ve Inelastik Çarpışma

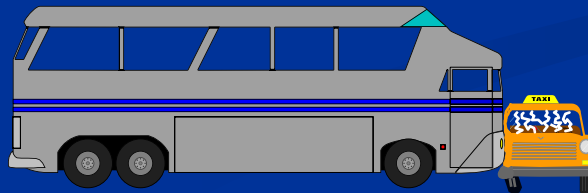
- Kinetik enerji ve momentumun korunduğu çarpışmaya elastik çarpışma denir. $K_{\text{önce}} = K_{\text{sonra}}$

- Aralarında yay olan 2 kutunun çarpışması yada bilardo toplarının çarpışması vs.



- Kinetik enerji korunmazken momentumun korunduğu çarpışmaya inelastik çarpışma denir. $K_{\text{önce}} \neq K_{\text{sonra}}$

- Çarpışan arabalar, çarpışmadan sonra cisimlerin yapıştığı çarpışmalar, vs.



1 Boyutta İnelastik Çarpışma Örnek

- Sürtünmesiz bir yüzeyde hareketsiz durmakta olan M kütlesindeki bir bloğa bir tabancadan v hızıyla çıkan, m kütlesinde bir mermi sıkılıyor. Mermi bloğun içine giriyor ve V hızıyla hareket ettiriyor. m , M , ve V cinsinden :

- Merminin ilk hızı v nedir?
- Sistemin başlangıç enerjisi nedir?
- Sistemin son enerjisi nedir?
- Kinetik enerji korunumlumudur?



Örnek...

- Blok ve mermiyi bir sistem olarak ele alırız. Mermi atıldıktan sonra, sisteme x -yönünde etki eden bir dış kuvvet yoktur.
- x yönünde momentum korunur!



$$v = \left(\frac{M + m}{m} \right) V$$

Örnek...

- Çarpışmadan önce ve sonra kinetik enerji nedir?

- Önce:

$$E_B = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{M + m}{m}\right)^2 V^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M + m}{m}\right)(M + m)V^2$$

- Sonra:

$$E_A = \frac{1}{2}(M + m)V^2$$

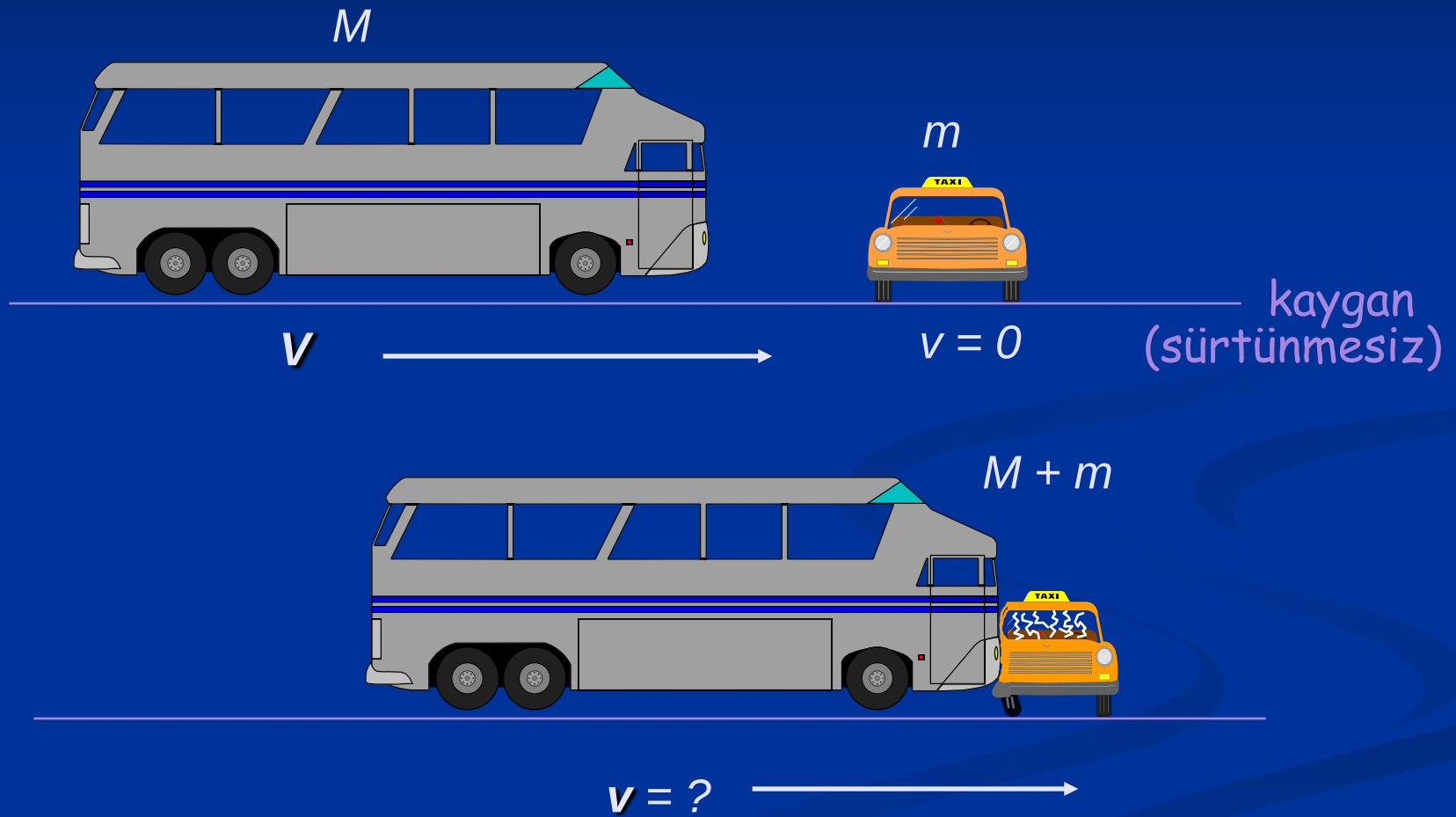
- ➔

$$E_A = \left(\frac{m}{M + m} \right) E_B$$

Kinetik enerji korunumlu değil! (sürtünme mermiyi durdurur)

Binaenaleyh, momentum korunmuştur!

1 Boyutta İnelastik Çarpışma Örnek



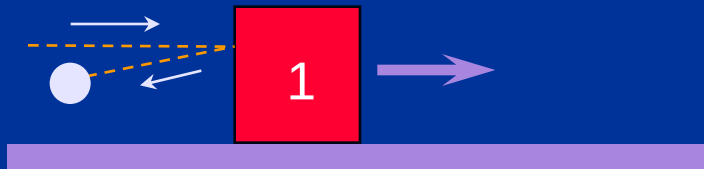
Örnek...

Ders 13, Soru 2

Momentumun Korunumu

- Aşağıda verilen 2 sistemde özdeş 2 top sürtünmesiz bir yüzeyde durgun halde bulunan özdeş 2 kutuya aynı hızla çarpıyor.
- İlk durumda top geri dönerken 2. durumda kutuya yapışık kalıyor.
 - Hangi kutunun hızı daha fazladır?

(a) Kutu 1



(b) Kutu 2

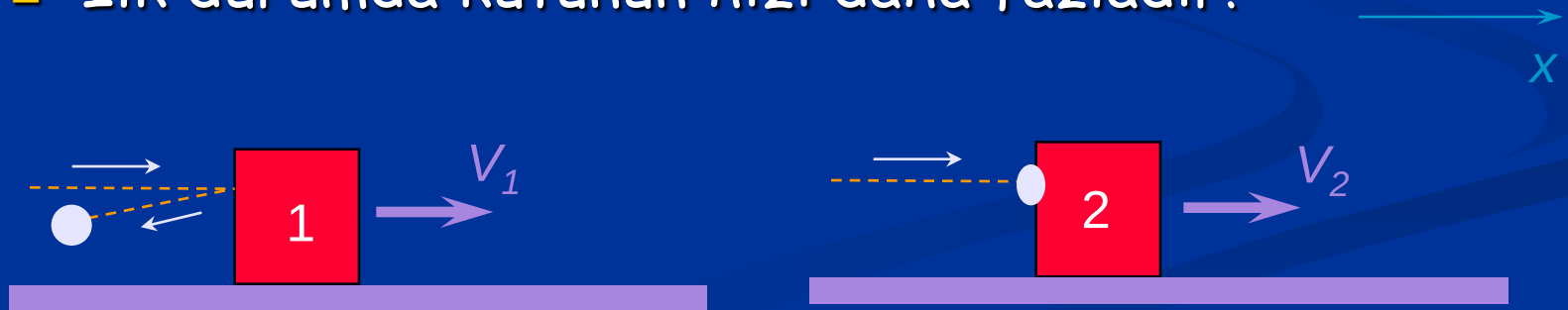


(c) aynı

Ders 13, Soru 2

Momentumun Korunumu

- Hareket yönünde (x-yönü) dış kuvvet olmadığından x-yönünde momentum korunur.
- Her iki durumda momentum aynıdır (*mv topun momentumu*).
- Çarpışmadan sonra ilk durumun momentumu *negatiftir*, momentum korunduğundan kutunun momentumu pozitiftir.
- İlk durumda kutunun hızı daha fazladır!



Ders 13, Soru2

Momentumun Korunumu

$$mv_{ilk} = MV_1 - mv_{son}$$

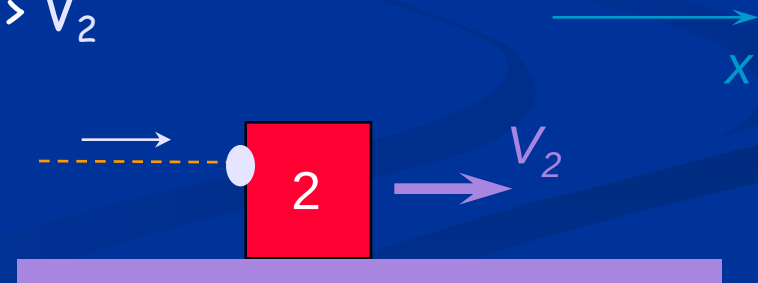
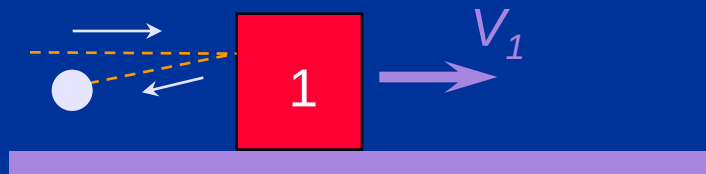
$$\Rightarrow V_1 = (mv_{ilk} + mv_{son}) / M$$

$$mv_{ilk} = (M+m)V_2$$

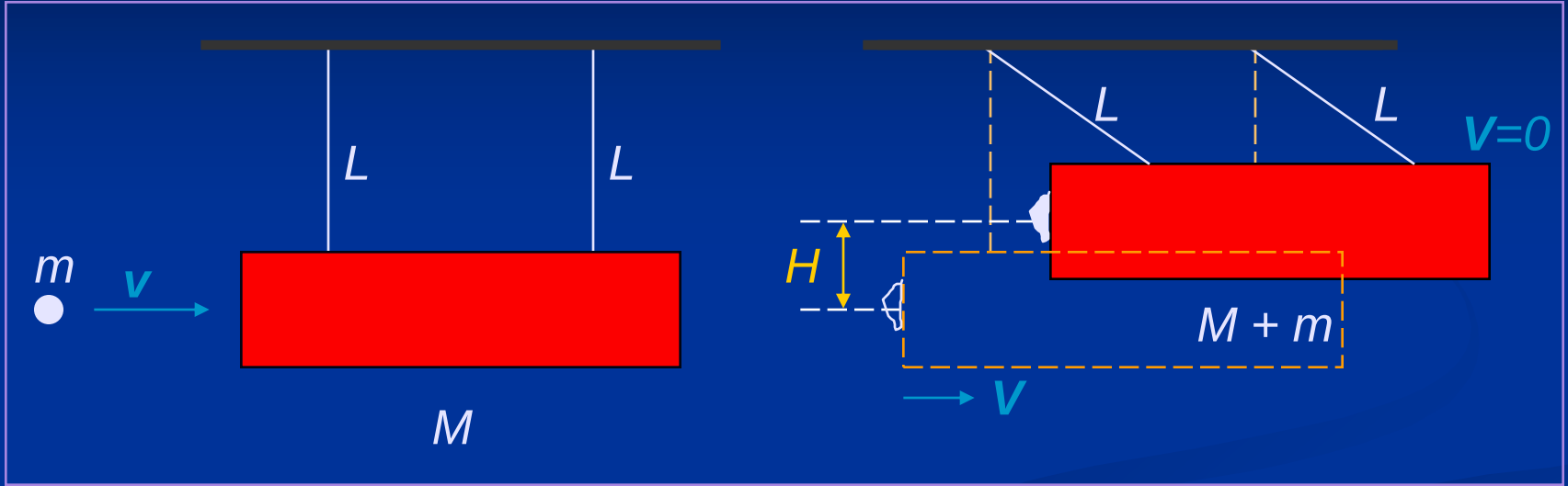
$$\Rightarrow V_2 = mv_{ilk} / (M+m)$$

V_1 hızında pay V_2 hızınınkinden büyük, paydası küçüktür.

$$\Rightarrow V_1 > V_2$$



Balistik Sarkaç



- Kütlesi m olan bir mermi L uzunluğunda ipe asılı M kütlesinde bir kütleye v hızıyla çarpıyor ve $m + M$ kütlesi H kadar yükseliyor.

Verilen bir H için merminin ilk hızı v nedir?

Balistik Sarkaç

➤ Proseste 2 basamak var:

1. m ve M kütlesi inelastik çarpışıyor. Çarpışmadan sonra M ve m kütlesi V hızıyla beraber hareket ediyor.
2. M ve m kütlesi H kadar yükseliyor mekanik enerjinin K+U korunumu E .

Balistik Sarkaç

■ Basamak 1: Momentum Korunumu

x-yönünde: $mv = (m + M)V$

$$V = \left(\frac{m}{m + M} \right) v$$

➤ Basamak 2: K+U Enerji Korunumu

$$(E_i = E_f)$$

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gH$$

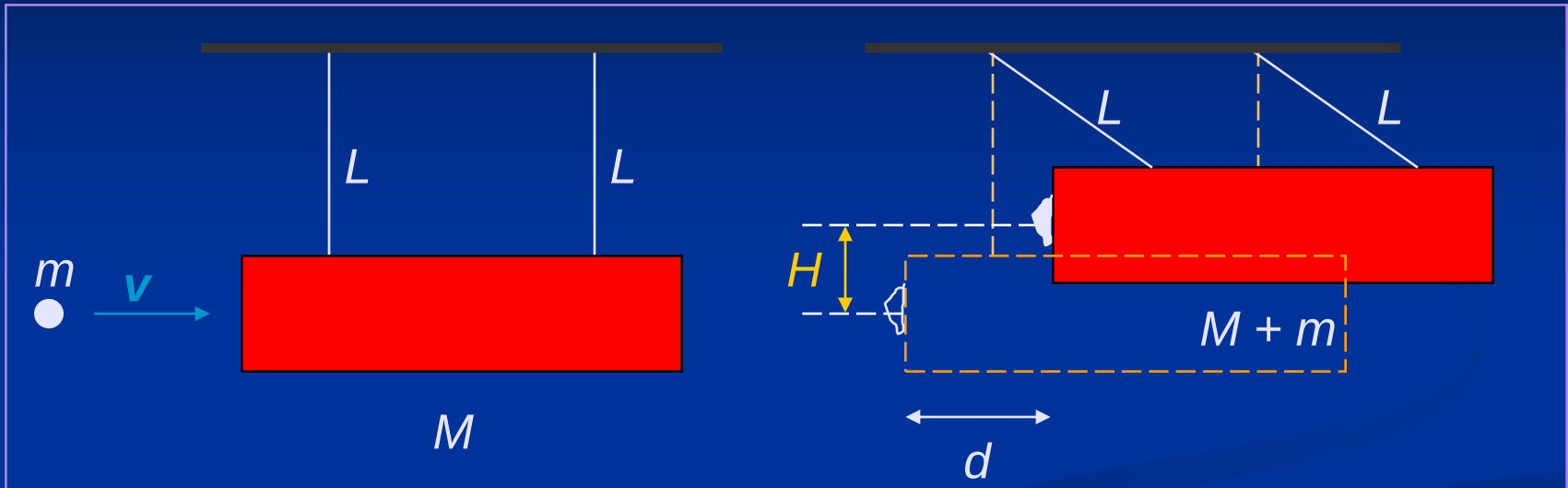


$$V^2 = 2gH$$

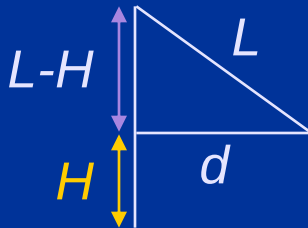
V sadeleştirilirse:

$$v = \left(1 + \frac{M}{m} \right) \sqrt{2gH}$$

Balistik Sarkaç



- Yükseklik yerine x yönündeki yerdeğiştirme d ölçülür



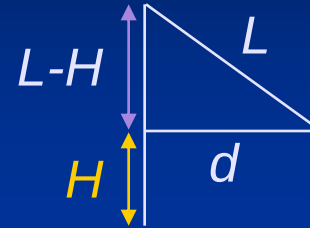
$$L^2 = d^2 + (L - H)^2$$

$$H = L - \sqrt{L^2 - d^2}$$

Balistik Sarkaç

$$H = L - \sqrt{L^2 - d^2}$$

$$= L - L\sqrt{1 - \frac{d^2}{L^2}} \approx L - L\left(1 - \frac{d^2}{2L^2}\right) \approx \frac{d^2}{2L} \rightarrow \frac{d}{L} \ll 1$$



$$v = \left(1 + \frac{M}{m}\right) \sqrt{2gH}$$



$$v = \left(1 + \frac{M}{m}\right) d \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$d \ll L$ için

Kim daha hızlı fırlatır?...

Özet

- Çok parçacıklı sistem
- Kütle Merkezi
- Lineer Momentum
- Örnekler
- Momentumun Korunumu
- 1 Boyutlu İnelastik Çarpışma
- Balistik Sarkaç